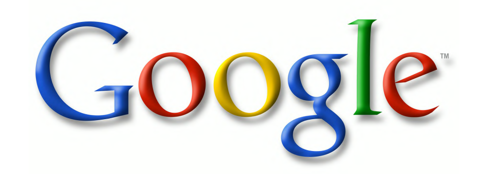
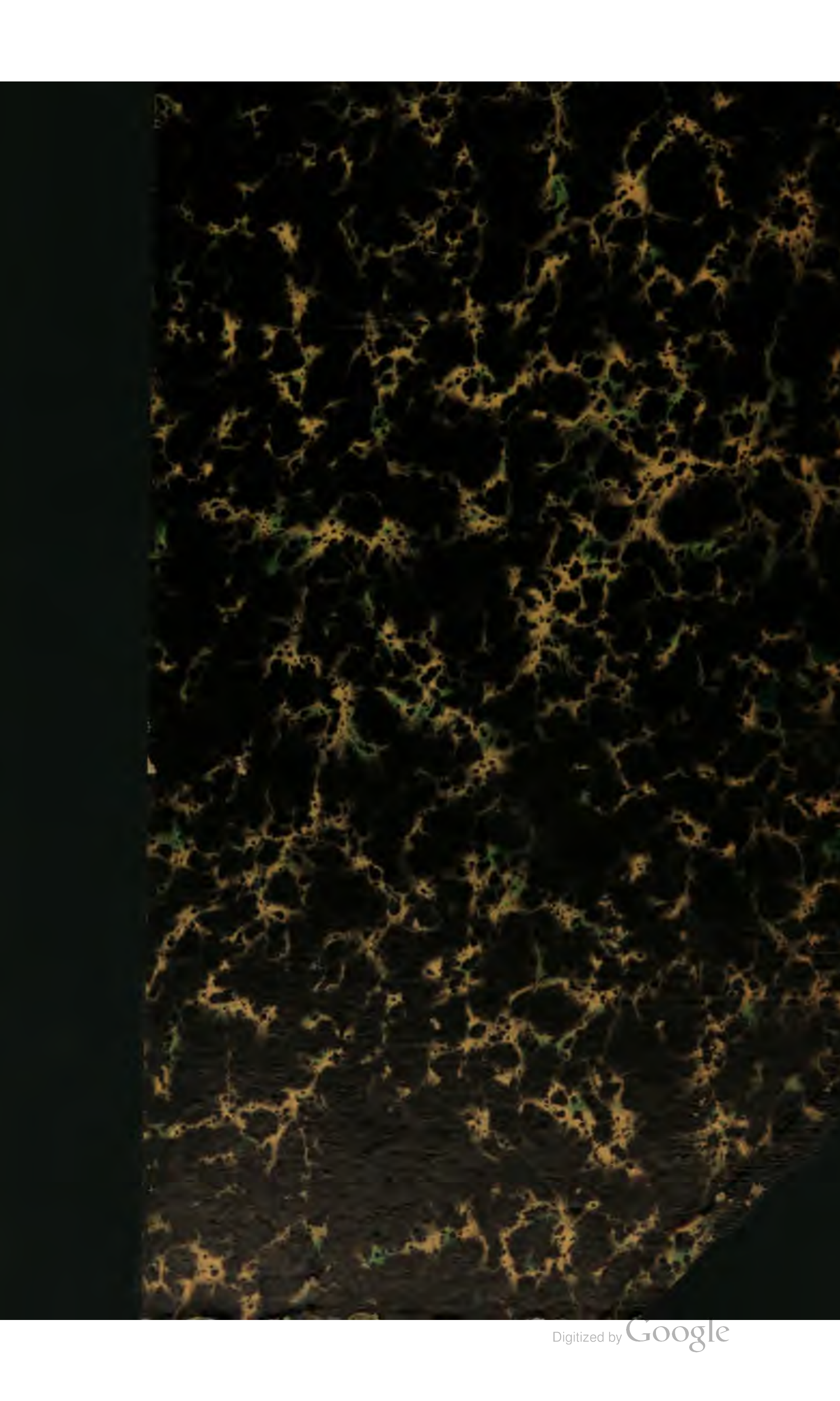





Digitized by Google

Allgemeine Krystallbeschreibung.

Allgemeine

Krystallbeschreibung

auf Grund einer vereinfachten

Methode des Krystallzeichnens

bearbeitet

und mit einer Anleitung zur Anfertigung

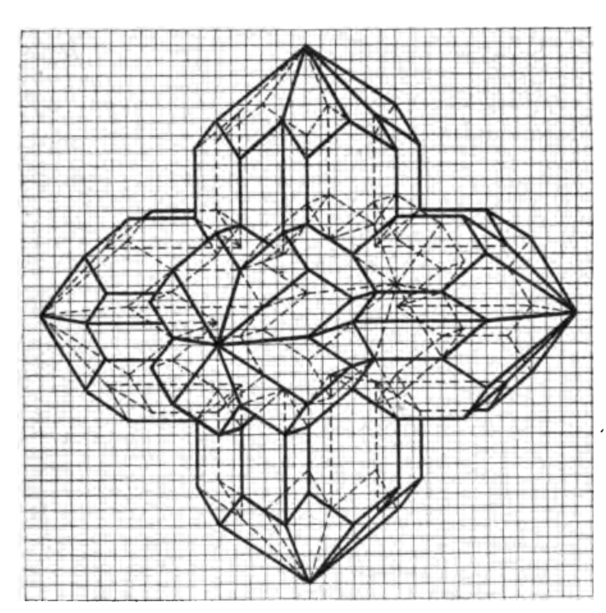
der Krystallnetze und Krystallmodelle

herausgegeben

von

Dr. AUG. NIES, Professor.

Mit 182 Originalzeichnungen im Texte.



Stuttgart.

E. Schweizerbart'sche Verlagsbuchhandlung (E. Koch).

1895.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Vorwort.

Mit der Herausgabe der vorliegenden Schrift beabsichtigt der Verfasser in erster Linie seinen Fachgenossen ein Hilfsmittel, das ihm selbst bei der Einführung in die Kenntnis der Krystallgestalten seit mehr als zehn Jahren gute Dienste geleistet hat, allgemeiner und gründlicher als dies durch kurze Vorträge auf Versammlungen oder Aufsätze in Zeitschriften möglich war, bekannt zu geben und ihnen zugleich einen Leitfaden für den Unterricht zu liefern.

Es ist zweifellos, dass eine gründlichere Kenntnis der Elemente der Krystallographie, wie dies schon Hermann Kopp in seiner im Jahre 1849 herausgegebenen „Einleitung in die Krystallographie“ bemerkt hat, für den Anfänger nur durch Selbstthätigkeit, namentlich durch Uebungen im Zeichnen und im Bestimmen an Modellen und wirklichen Krystallen möglich ist. Nun ist aber das Zeichnen der Krystallformen, wenigstens wenn man von den allereinfachsten absieht, nach den bisher üblichen Methoden, selbst der vereinfachten Kopp'schen, viel zu umständlich und zeitraubend und erfordert, wenn schöne Resultate erzielt werden sollen, so grosse Sorgfalt und Fertigkeit, dass es vielfach ganz aus dem Unterricht verschwunden ist oder doch auf die Darstellung einiger weniger Formen beschränkt wurde.

Das Wesentliche der neuen Methode des Krystallzeichnens, durch welche der Verfasser die Hauptschwierigkeiten beseitigen zu können glaubt, besteht nun darin, dass sie die Eckpunkte der Krystallformen auf elementare Weise analytisch-geometrisch durch deren Koordinaten

bestimmt und dass sie sich, um die Länge und Richtung der letzteren leicht finden zu können, des quadrierten Papieres bedient.

Eben so leicht wie man die Axenabschnitte, durch welche die Lage der Flächen bestimmt wird, beziehungsweise die Ableitungszahlen zur Bildung eines Zeichens für die Formen, welche alle Flächen von ähnlicher Lage umfassen, benutzt, kann man mit Hilfe derselben Zahlen die Koordinaten der Schnittpunkte der Kanten und der Flächen an diesen Formen auf elementarste Weise ableiten.

Die dabei gefundenen Ausdrücke lassen sich einfach mit Hilfe von aus den reciproken Ableitungszahlen gebildeten Determinanten zweiten, beziehungsweise dritten Grades finden. Die Form der Determinante ist daher auch in der vorliegenden Arbeit oft beibehalten, doch ist abgesehen von der mechanischen Ausrechnung der Determinanten und der Subdeterminanten, die gezeigt wird, keine Kenntnis der Determinantentheorie erforderlich. Auch die Zonengleichung enthält eine Determinante.

Da die Naumann'sche Bezeichnungsweise, die für den Anfänger wegen ihrer unmittelbaren Verständlichkeit und Anschaulichkeit allen übrigen vorzuziehen ist, nur für die ganzen Formen gilt, so wurde zur Bezeichnung der einzelnen Flächen in allen Systemen (mit einer Aenderung im hexagonalen System) eine Form gewählt, aus der das Axenverhältnis und die Lage der Fläche unmittelbar zu ersehen ist. So bedeutet z. B. $A_n B_1 C_{-m}$ die Fläche, welche in dem betreffenden System die nach vorn gestellte Axe vorn in der n-fachen, die von links nach rechts gestellte Axe rechts in der einfachen und die Vertikalaxe unten in der m-fachen Entfernung schneidet. Die Fläche gehört je nach dem System zu der Form $m\breve{P},n$, $-m\mathrm{P}n$, $m\breve{P}n$, mPn oder mOn oder auch zu einem von diesen Formen abgeleiteten Halbflächner oder Viertelflächner.

Die Lage der Ecken ist nicht nur von dem Axenverhältnis der Flächen, sondern auch von ihrer Centraldistanz abhängig. Bei der Ableitung der einzelnen Formen (S. 10—69) ist diese stets so gewählt, dass jede Fläche eine Axe in der einfachen Entfernung schneidet, und dann diese Centraldistanz gleich 1 gesetzt.

Bei verzerrten Formen und Kombinationen ist die Centraldistanz der verschiedenen Flächen verschieden und davon der wechselnde Habitus der Krystalle abhängig (S. 69—118). Zur genaueren Bezeichnung der Form wurde deshalb bei Kombinationen stets hinter der Bezeichnung der einzelnen Formen ihre Centraldistanz in Klammern zugefügt.

Als Beispiele für Kombinationen wurden an vierzig der häufigsten und wichtigsten Mineralien vorkommende ausgewählt. Durch Aenderung in den Centraldistanzen lassen sich daraus leicht beliebig viele andere einfach zu zeichnende Beispiele ableiten.

Ein besonderes Kapitel behandelt die regelmässigen Verwachsungen. Hierbei wurden die Beispiele vorwiegend aus den Systemen mit rechtwinkligen Axen gewählt, weil für diese eine elementare Berechnung der Lage der Ecken, Flächen und Axen der Krystalle in der Zwillingsstellung ohne Anwendung von Trigonometrie möglich ist. Dass übrigens auch Zwillinge des hexagonalen und monoklinen Systems und Viellinge mit hinreichender Deutlichkeit und in kürzester Zeit mit Hilfe der neuen Methode gezeichnet werden können, werden die Figuren 161—171 beweisen.

Was die Anordnung des Stoffes anlangt, so sind im ersten Kapitel nach der Feststellung der Begriffe Axe, Parameter, Ableitungszahlen und Krystallform, die verschiedenen Krystallsysteme auf Grund des verschiedenen Grades von Symmetrie in ähnlicher Weise abgeleitet, wie dies von P. Groth in den beiden ersten Auflagen seiner vortrefflichen physikalischen Krystallographie geschehen ist. Diese Art der Ableitung der verschiedenen Systeme hat pädagogisch so grosse Vorzüge, dass der Verfasser für den Anfangsunterricht in der Krystallbeschreibung an derselben auch dann festgehalten hätte, wenn ihm die erst nach Druck des grössten Teiles dieses Werkes erschienene neue Auflage des Groth'schen Werkes früher bekannt geworden wäre, so sehr er bedauert, die nun von Groth selbst aufgegebenen Bezeichnungen asymmetrisch und monosymmetrisch neben triklin und monoklin beibehalten zu haben.

Die Zusammenfassung je einer Anzahl von der 32 möglichen

Klassen in den bisher angenommenen Krystallsystemen und die Ableitung der hemiedrischen, hemimorphen und tetartoedrischen Formen von den holoedrischen, ist für den Anfänger eine ausserordentliche Erleichterung und naturgemäss, weil morphologisch auch solche Substanzen, welche auf Grund ihrer physikalischen Eigenschaften als hemiedrisch, tetartoedrisch oder hemimorph anzusehen sind, so lange nur gewisse Formen an ihnen aufgefunden sind — im regulären System z. B. Würfel und Rhombendodekaeder — ebenso gut als holoedrisch aufgefasst werden können. Ueberdies genügen die Begriffe Holoedrie, Hemiedrie, Tetartoedrie und Hemimorphie zur Auffindung der 32 möglichen Klassen auch auf der Stufe mathematischer Ausbildung, wo der Beweis nach Bravais, Gadolin, Curié oder Minnigerode noch nicht verstanden werden kann.

Ist einmal die Reihe der einfachen Formen abgeleitet, so können auch dem Anfänger die Begriffe einfache und zusammengesetzte Symmetrie, Centrum der Symmetrie, zwei-, drei-, vier- und sechszählige Symmetrieaxe an den Figuren und Modellen klar gemacht werden.

Bei der Ableitung der Formen fängt man am besten auch dann, wenn man nicht die 32 Klassen aus der asymmetrischen durch Einführung der möglichen Symmetrieelemente nach und nach ableiten will, wie dies Groth in der neuesten Auflage thut, mit dem triklinen System an und gelangt von einfachen Flächenpaaren allmählich zu den komplizierten Formen des regulären Systems. Die Formen der einzelnen Systeme lassen sich dann am leichtesten aus der Form, welche den allgemeinsten Fall darstellt, also im regulären System vom Achtundvierzigflächner, ableiten.

Bei den Kombinationen ist dagegen, wenn man den pädagogisch richtigen Weg vom leichteren zum schwereren einhalten will, mit den regulären zweizähligen Kombinationen zu beginnen und bei den formenreichen triklinen Kombinationen aufzuhören. Der gleiche Gang ist bei den Zwillingsverwachsungen beizubehalten.

Ein besonderes Kapitel hat der Verfasser der Anleitung zur Fertigung der Krystallnetze und Modelle gewidmet. Wenn

zum Zweck der Zeichnung einer Form die Koordinaten ihrer Ecken berechnet sind, so findet man daraus sehr leicht die Länge der Kanten und Diagonalen der Flächen und kann damit diese letzteren konstruieren. Die Konstruktion der Netze ist an dem Beispiel der regulären Formen gezeigt. Die Anfertigung der Modelle ist für alle, die einige Handfertigkeit besitzen, sehr leicht. Den Lehrern des Handfertigkeitsunterrichts hofft der Verfasser daher mit der gegebenen Anleitung einen Dienst geleistet zu haben.

Die Krystallbeschreibung umfasst auch die Angabe der Winkel, welche Flächen und Kanten der Krystalle bilden, wenn auch die Benutzung derselben zur Auffindung der Elemente der Grundformen und Ableitungszahlen Gegenstand der Krystallberechnung ist, die einer höheren Stufe des Unterrichts in der Krystallographie vorbehalten bleiben muss. Im Anhang ist daher der Versuch gemacht, so elementar wie möglich, d. h. nur mit den Anfangsgründen der Trigonometrie, die Abhängigkeit der Winkel von den Ableitungszahlen wenigstens für das reguläre System zu zeigen.

Die Beziehung zwischen den Koordinaten der Ecken der regulären Krystallformen und dem Inhalt und der Oberfläche derselben bei gleicher Centraldistanz der Flächen ist eine so einfache, dass es sich lohnt darauf aufmerksam zu machen. Der letzte Abschnitt bringt den Nachweis, dass das reguläre Dodekaeder und Ikosaeder als Krystallformen unmöglich sind.

Dadurch, dass alle Bemerkungen und Berechnungen, die sich nur auf die Ausführung der Zeichnungen beziehen, durch kleineren Druck kenntlich gemacht sind, hofft der Verfasser das Buch auch für diejenigen brauchbar gemacht zu haben, welche sich der hier benutzten Methode des Krystallzeichnens nicht bedienen wollen. Die Zeichnung der Krystalle ist mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte auch bei Konstruktion der Axenkreuze nach jeder anderen Methode möglich, wenn auch zeitraubend.

Die Originale der Zeichnungen sind alle auf das vom Verfasser auch beim Unterricht benutzte Papier, das in Quadrate von 4 mm Seitenlänge geteilt ist, gezeichnet und meistens auf die Hälfte oder

ein Drittel verkleinert, um Raum zu sparen. Zur sauberen Ausführung der Zeichnungen empfiehlt es sich, die Ecken auf quadriertem Papier aufzusuchen und durch Durchstechen auf weisses Papier zu übertragen. Im Unterricht zeichnet der Verfasser auf eine mit roten Linien in Quadrate von 3 cm Seitenlänge geteilte Wandtafel.

Möge es dem Verfasser gelungen sein, ein Werk zu liefern, das für die Zwecke, für die es bestimmt ist, auch wirklich brauchbar ist.

Mainz, im August 1895.

Dr. Aug. Nies.

Inhalt.

Anhang.

Einleitung.

Wenn flüssige oder gasförmige Körper den festen Aggregatzustand annehmen, so legen sich ihre kleinsten Teile entweder regellos oder nach ganz bestimmten Gesetzen nebeneinander. Das letztere findet nur statt bei den Körpern von bestimmter chemischer Zusammensetzung. Eine Folge der gesetzmässigen Lagerung ist einerseits, dass die hierbei entstehenden Individuen in gleichen Richtungen gleiche, in verschiedenen Richtungen im allgemeinen verschiedene physikalische Eigenschaften zeigen und andererseits, dass dieselben bei ungestörter Ausbildung von ebenen Flächen begrenzte, mehr oder weniger symmetrische Formen annehmen d. h. Krystalle werden.

Die Krystallographie oder die Lehre von den Krystallen zerfällt in drei Teile. Die Krystallographie im engeren Sinne oder Morphologie der Krystalle beschäftigt sich ausschliesslich mit den geometrischen Eigenschaften der Krystalle. Die chemische Krystallographie behandelt die Beziehungen, welche zwischen diesen und der chemischen Zusammensetzung der Körper bestehen, und die physikalische Krystallographie untersucht inwiefern die geometrischen und physikalischen Eigenschaften zusammenhängen.

Die Krystallographie im engeren Sinne ist hiernach eine rein mathematische Disziplin und zerfällt in die Krystallbeschreibung und die Krystallberechnung. Die erstere, auf welche wir uns hier im Wesentlichen beschränken, erfordert zum vollen Verständnis die Bekanntschaft mit einigen geometrischen Sätzen, welche wir vorausschicken wollen.



I. Kapitel.

Axen und Axenebenen.

§ 1. Die Lage eines Punktes A auf einer Geraden ist bestimmt durch den Abstand von einem gegebenen Punkt O auf derselben, also durch den Abschnitt OA (Fig. 1).

Die Lage eines Punktes Q in einer Ebene wird bestimmt mit Hilfe zweier in derselben liegenden Geraden (Axen), indem man durch denselben zu jeder dieser Geraden eine Parallele zieht. Ist die Länge dieser Linien BQ und CQ (Koordinaten) bekannt, so lässt sich der Punkt Q aufsuchen, wenn ausserdem noch die Richtung, in welcher der Punkt von den Axen aus liegt, bemerkt ist.

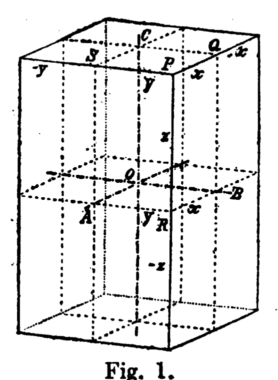


Fig. 1.

Die Lage eines Punktes P im Raum lässt sich mit Hilfe von 3 nicht in einer Ebene liegenden Geraden (Axen) und den durch dieselben gelegten Axenebenen bestimmen, indem man die Abstände desselben in der Richtung der 3 Axen (Koordinaten) misst und sich merkt, ob man dabei nach vorn oder hinten, oben oder unten, rechts oder links in der Richtung der Axen gegangen ist.

Diese Beachtung der Richtungen ist notwendig, weil auf jeder Geraden von einem Punkt aus zwei Punkte in gleichem Abstand, aber auf verschiedenen Seiten liegen, in einer Ebene je 4 Punkte mit gleichen Abständen von den Axen und im Raum je 8 Punkte mit gleichen Ent fernungen von den Axenebenen.

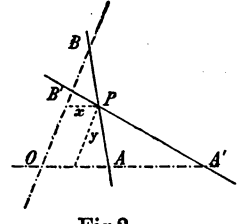


Fig.2 .

Bei der Bezeichnung der Richtungen pflegt man deshalb die Richtungen nach vorn, rechts und oben als positiv, diejenigen nach hinten, links und unten als negativ zu bezeichnen.

§ 2. Die Lage einer Geraden G' ist bestimmt durch die Lage von 2 Punkten auf derselben, also z. B. durch die Lage der beiden Punkte A' und B', in denen sie zwei Axen schneidet, folglich durch die zwei Abschnitte OA' und OB'.

Liegt ein Punkt P auf der Geraden G', so gilt für seine Koordinaten x und y folgende Gleichung

$$\frac{x}{OA'} + \frac{y}{OB'} = 1.$$

Beweis: Die Parallele durch P zu AO' treffe in B_y, die zu OB' in A_x. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $B'B_yP$ und $B'OA'$ folgt die Proportion:

$$B_yP : OA' = B_yB' : OB'$$

oder:
$$\frac{x}{OA'} = \frac{OB'-y}{OB'} = 1 - \frac{y}{OB'}$$

also:
$$\frac{x}{OA'} + \frac{y}{OB'} = 1 \text{ oder, wenn } \frac{1}{OA'} = a_1$$

und $\frac{1}{OB'} = b_1$ gesetzt wird:

$$a_1x + b_1y = 1.$$

Liegt der Punkt P zugleich auf einer Geraden G'' mit den Axenabschnitten OA'' und OB'', so gilt für ihn auch die Gleichung:

$$a_2x + b_2y = 1,$$

und es lassen sich die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden G' und G'' bestimmen, es ist:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y = \frac{a_1 - a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Den gemeinsamen Nenner $a_1 b_2 - a_2 b_1$ kann man auch finden, wenn man die Koefficienten von x und y in den beiden Gleichungen unter einander schreibt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

und sie dann übers Kreuz multipliziert (mit a anfangend) und das zweite Produkt vom ersten abzieht. Man nennt diesen Nenner die „Determinante“ der Koefficienten. Der Zähler von x wird dadurch gefunden, dass man in der Determinante die Koefficienten von x gleich 1 setzt, der Zähler von y, indem man dasselbe mit den Koefficienten von y thut.

§ 3. Die Lage einer Ebene E im Raum (Fig. 3) ist bestimmt durch 3 nicht in einer Geraden liegende Punkte derselben also etwa die 3 Punkte A, B und C, in denen die Ebene 3 sich schneidende Geraden (Axen) trifft, folglich durch die Abschnitte OA, OB und OC. Die Ebene schneidet die 3 Axenebenen in den Geraden AB, BC und AC und das Dreieck ABC ist ein Teil derselben.

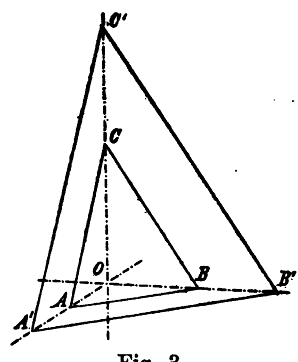


Fig. 3.

Eine mit der Ebene E parallele Ebene E', schneidet die Axenebenen in den Geraden $A'B'$, $B'C'$ und $A'C'$, welche zu den entsprechenden Geraden AB, BC und AC parallel sind: Hieraus ergiebt sich auch die Gleichheit der Verhältnisse $\frac{OA'}{OA}$, $\frac{OB'}{OB}$ und $\frac{OC'}{OC}$ und die Proportion

$$OA' : OB' : OC' = OA : OB : OC.$$

Bei einer parallelen Verschiebung einer Ebene verändert sich also nur ihr Abstand vom Schnittpunkt der Axen, die sogenannte Centraldistanz, dagegen bleibt das Verhältnis der Axenabschnitte unverändert. Man nennt die Axenabschnitte auch Parameter und das Verhältnis derselben zu einander, wodurch die Lage der Flächen bestimmt wird, das Parameterverhältnis der Flächen.

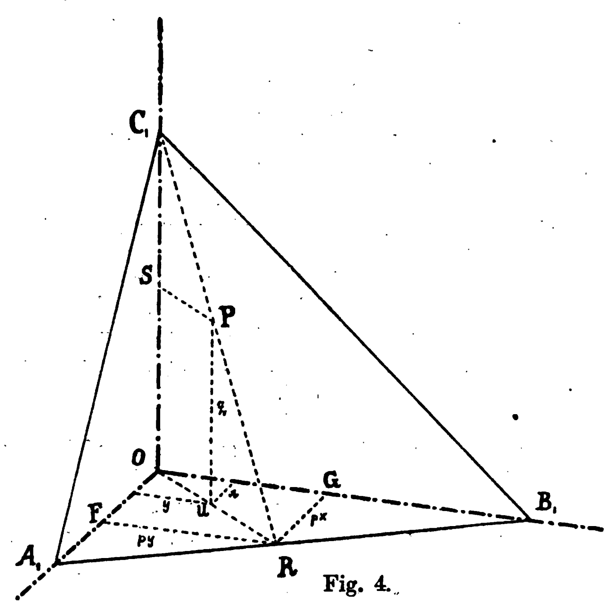


Fig. 4.

Liegt ein Punkt auf einer Ebene E_1 mit den Axenabschnitten OA_1, OB_1 und OC_1, so gilt für seine Koordinaten x, y, z folgende Gleichung:

$$\frac{x}{OA_1} + \frac{y}{OB_1} + \frac{z}{OC_1} = 1,$$

Beweis: Legt man durch einen beliebigen Punkt P (Fig. 4) in der Ebene E_1 und die Axe OC_1 eine Ebene OC_1R, so gilt für die Koordinaten des Punktes P in dieser Ebene folgende Gleichung (vergl. § 2):

$$\frac{SP}{OR} + \frac{UP}{OC_1} = 1$$

oder da $SP = OU$ und $UP = z$ ist,

$$\frac{OU}{OR} + \frac{z}{OC_1} = 1.$$

Ist OR $p$mal grösser als OU, so sind die Koordinaten von R px und py, und es besteht die Gleichung:

$$\frac{px}{OA_1} + \frac{py}{OB_1} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x}{OA_1} + \frac{y}{OB_1} = \frac{1}{p} = \frac{OU}{OR}$$

Setzt man diesen Wert für $\frac{OU}{OR}$ in die vorige Gleichung ein, so erhält man $\frac{x}{OA_1} + \frac{y}{OB_1} + \frac{z}{OC_1} = 1$, was zu beweisen war.

Ist eine Fläche ABC durch ihre Axenabschnitte $OA = a$, $OB = b$ und $OC = c$ gegeben, wobei gewöhnlich $b = 1$ gesetzt wird, so genügen zur Bezeichnung der Lage einer anderen Fläche zwei weitere Werte.

Eine Fläche $A_p\ B_q\ C_r$, welche die Axen in der p-fachen bezw. q-fachen und r-fachen Entfernung schneidet, lässt sich parallel so verschieben, dass sie eine Axe in der einfachen Entfernung schneidet, sie verwandelt sich dabei etwa in die Fläche $A_1\ B_{\frac{q}{p}}\ C_{\frac{r}{p}}$, oder wenn $\frac{q}{p} = n$ und $\frac{r}{p} = m$ gesetzt wird, in eine Fläche $A_1\ B_n\ C_m$, Die Werte m und n, durch die also die Lage der Fläche bestimmt ist, heissen die Ableitungszahlen der Fläche, sie sind erfahrungsmässig bei Krystallen stets einfache rationale Zahlen (Gesetz der Rationalität der Ableitungszahlen).

§ 4. Krystallformen und Krystallsysteme. Asymmetrisches und Monosymmetrisches System. Legt man durch je 2 von 3 beliebigen, sich in einem Punkte schneidenden Geraden (Axen) Ebenen (Axenebenen), so entstehen an dem Schnittpunkt 8 dreiseitige Ecken (Oktanten). Zwei in einer Ebene zusammenstossende Ecken nennt man anliegende, zwei, welche sich nur in einer Geraden berühren, nennt man gegenüberliegende und zwei, welche nur den Scheitelpunkt gemein haben, entgegengesetzte Ecken. Ecken sind gleich, wenn ihre Flächen- und Kantenwinkel gleich sind. Dies ist stets der Fall bei den entgegengesetzten Ecken. Sollen zwei anliegende Ecken gleich werden, so muss eine der Geraden auf den beiden anderen senkrecht stehen, weil gleiche Nebenwinkel rechte Winkel sind. Dann ist aber auch ein Teil der gegenüberliegenden Ecken gleich (als entgegengesetzte Ecken der anliegenden), und es giebt dann nur noch zweierlei Ecken, welche symmetrisch auf beiden Seiten der Ebene der zwei Geraden, auf welchen die dritte senkrecht steht, liegen.

Es ist nun eine Eigentümlichkeit aller Krystalle, dass eine Fläche, deren Abschnitte auf einem durch die Mitte des Krystalls gelegten Axenkreuz in einem bestimmten Verhältnis stehen, sich in allen gleichen Ecken mit demselben Verhältnis wiederholt, also z. B. stets in der entgegengesetzten Ecke.*) Die Gesamtheit dieser Flächen gehört derselben Krystallform an. Es sind mit anderen Worten an den Krystallen die Flächen einer Krystallform, wenn es deren mehr als zwei sind, symmetrisch zu beiden Seiten einer Ebene verteilt. Diese

*) Eine Ausnahme bildet die Hemiedrie und Hemimorphie § 45 ff.

teilt dann den Krystall in zwei Hälften, die sich verhalten, wie ein Gegenstand zu seinem Bild im Spiegel. Eine solche Ebene nennt man eine Symmetrieebene und eine darauf senkrechte Linie eine Symmetrieaxe. Man wird hiernach in Krystalle, welche nur eine Symmetrieebene besitzen, ein Axenkreuz hineinzudenken haben, von dem eine Axe als Symmetrieaxe genommen wird, während die beiden anderen in die Symmetrieebene fallen.

Die Gesamtheit aller Krystallformen, welche denselben Grad von Symmetrie haben, denen also dasselbe Axenkreuz zu Grunde gelegt werden kann, bildet ein Krystallsystem.

Alle Krystallformen ohne Symmetrieebene gehören zum asymmetrischen System, solche mit nur einer Symmetrieebene zum monosymmetrischen Krystallsystem.

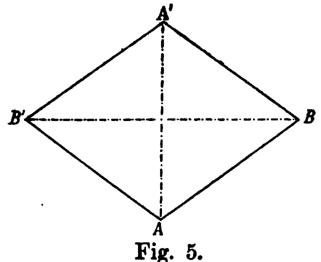


Fig. 5.

§ 5. Rhombisches System. Wiederholt sich eine Fläche in allen Oktanten, so setzt das ein Axenkreuz voraus, bei dem alle 8 Ecken gleich sind, was nur dann der Fall ist, wenn alle Axen und Axenebenen senkrecht aufeinander stehen. Jede Axe ist dann Symmetrieaxe und jede Axenebene Symmetrieebene.

Schneidet in diesem Fall eine Fläche ABC eines Krystalls die Axen so, dass die Parameterverhältnisse $a:b:c$ irrational sind, so ist dies auch bei allen Parameterverhältnissen der übrigen an dem Krystall möglichen Flächen der Fall.

Eine Krystallform muss hiernach in diesem System im allgemeinen 8 Flächen umfassen, die bei gleicher Centraldistanz die 3 Axenebenen in Rhomben schneiden (Fig. 5) (da die Diagonalen auf einander senkrecht stehen und ungleich lang sind). Man nennt deshalb dieses System das rhombische System.

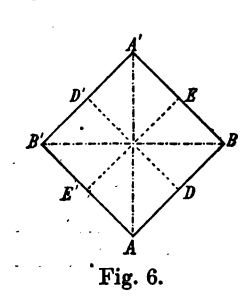


Fig. 6.

§ 6. Tetragonales oder Quadratisches System. Schneidet dagegen eine Krystallfläche ein rechtwinkliges Axenkreuz so, dass das Verhältnis zweier Parameter rational ist, so wird bei einem bestimmten rationalen Koefficienten $na = b = 1$ werden, und an Stelle eines rhombischen Querschnitts ein Quadrat entstehen (Fig. 6). Eine Krystallform von quadratischem Querschnitt ist aber nicht bloss symmetrisch zu den Axenebenen AOC und BOC, sondern auch zu den Ebenen, die durch die C-Axe

und die die Winkel der Diagonalen und die Seiten des Quadrats halbierenden Geraden DD' und EE' gelegt werden. Diese werden selbst zu Symmetrieaxen dieser neu hinzukommenden Symmetrieebenen, da sie auf denselben und auf einander senkrecht stehen. Den Krystallformen, welche diesen höheren Grad von Symmetrie zeigen, legt man einfacher ein Axenkreuz zu Grund, bei dem a und b gleich 1 sind, während $a:c$ irrational bleibt. Die A-Axe und B-Axe lassen sich hierbei vertauschen, ohne dass sich an den Formen etwas ändert; man nennt solche Axen gleichwertig. Auch die den Winkel dieser Axen halbierenden sogenannten Zwischenaxen sind gleichwertig.

Der höhere Grad von Symmetrie zeigt sich in dem Vorhandensein von Ebenen, in welche mehrere Symmetrieaxen fallen. Solche Ebenen nennt man Hauptsymmetrieebenen und die zugehörigen Symmetrieaxen Hauptsymmetrieaxen oder kurz Hauptaxen.

Die Formen dieses Systems, welches man das tetragonale oder quadratische nennt, zeigen also fünf Symmetrieebenen, eine Hauptsymmetrieebene und vier gewöhnliche, eine Hauptaxe, welche vertikal gestellt zu werden pflegt und vier gewöhnliche Symmetrieaxen, von denen man eine von vorn nach hinten und eine von links nach rechts stellt und Nebenaxen nennt. Die beiden andern Axen (Zwischenaxen) stehen dann schief von vorn nach hinten.

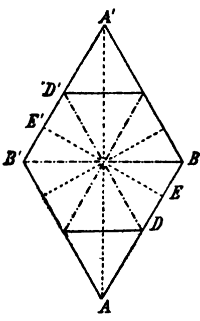


Fig. 7.

§ 7. Hexagonales System. Wird in einem Rhombus der spitze Winkel 60°, so bilden die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten mit den kürzeren Diagonalen des Rhombus gleichfalls Winkel von 60°. Denkt man dann durch jede dieser 3 Linien und die auf der Ebene derselben senkrechte Axe Ebenen gelegt, so wird durch diese 4 Ebenen der Raum in 12 gleiche Teile geteilt. Eine Fläche muss sich demnach auch 12mal wiederholen.

An Stelle des rhombischen Querschnitts erscheint dann ein regelmässiges Sechseck. In einer solchen Form sind aber nicht blos die Diagonalen BB', DD' (Fig. 7), sondern auch die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten gleichwertige Symmetrieaxen zu den durch diese Linien und die auf dem Querschnitt, der zur Hauptsymmetrieebene wird, senkrechten Axe (Hauptaxe) gelegten Symmetrieebenen.

Die Krystallformen, welche diesen Grad von Symmetrie besitzen, bilden ein besonderes Krystallsystem, das hexagonale, und legt man ihnen nicht das rhombische Axenkreuz zu Grunde, sondern ein

von 4 Axen gebildetes, indem man statt der *A*-Axe und der *B*-Axe die 3 Diagonalen des Sechsecks nimmt, also statt der *A*-Axe die zwei Geraden, welche mit der *B*-Axe Winkel von 60° einschliessen. Im Gegensatz zu diesen Axen, die man auch Nebenaxen nennt, heissen die 3 die Winkel dieser Axen halbierenden Geraden, zu denen auch die *A*-Axe gehört, Zwischenaxen.

Durch die im hexagonalen System vorhandenen 7 Symmetrieebenen wird der Raum in 24 gleiche Teile geteilt, am Schnittpunkte der 7 Axen entstehen 24 gleiche Ecken, und eine Fläche wird sich in diesem System also im allgemeinen vierundzwanzigmal wiederholen.

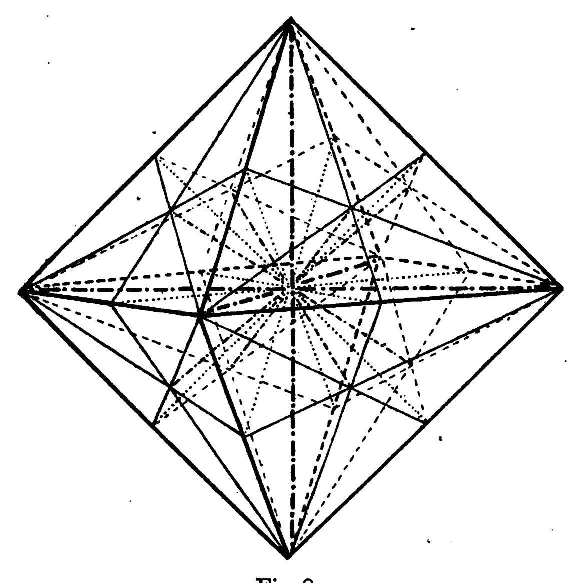


Fig. 8.

§ 8. **Reguläres System.** Werden endlich auch die Verhältnisse $a:c$ und $b:c$ rational, so tritt ein noch höherer Grad von Symmetrie ein; es werden dann auch die Ebenen *AOC* und *BOC* zu Hauptsymmetrieebenen und die *A*-Axe und *B*-Axe zu Hauptaxen. Es sind also im ganzen neun Symmetrieebenen vorhanden, nämlich 3 Hauptsymmetrieebenen und 6 gewöhnliche Symmetrieebenen und dem entsprechend auch 3 Hauptaxen und 6 gewöhnliche Symmetrieaxen oder Zwischenaxen, nämlich in jeder Hauptsymmetrieebene deren zwei. Die gewöhnlichen Symmetrieebenen schneiden sich ausser in den Hauptaxen auch noch in 4 Geraden, welche keine Symmetrieaxen sind und trigonale Axen genannt werden. Sie sind der geometrische Ort aller Punkte, welche von den 3 Axenebenen gleichen Abstand haben. Durch die 9 Ebenen wird der Raum in 48 gleiche Teile geteilt. Die 13 sich in einem Punkt schneidenden Axen sind die Kanten von 48 gleichen Ecken, sodass in diesem System, das den höchstmöglichen Grad von Symmetrie besitzt, und deshalb das reguläre genannt wird, eine Fläche sich im allgemeinen 48mal wiederholt. Fig. 8 zeigt eine Form, welche dem regulären System zugehört, mit allen Symmetrieebenen und Axen.

§ 9. Grundformen. Alle Krystallgestalten einer Mineralspecies zeigen (abgesehen von den Unvollkommenheiten in der Ausbildung, die mit Störungen im Wachstum zusammenhängen) nicht allein stets denselben Grad von Symmetrie und gehören deshalb zu demselben Krystallsystem, sondern es kommen an denselben stets nur solche Flächen und Formen vor, deren Axenverhältnisse sich von einander nur durch rationale Ableitungszahlen m und n unterscheiden, und zwar werden diese Zahlen um so einfacher, je zweckmässiger man das Axenkreuz wählt, welches man allen Formen zu Grunde legt. Est also von Wichtigkeit, welche Flächen man als Flächen der Grundform annimmt, bei welcher m und n gleich 1 zu setzen ist. Die relative Länge der Axenabschnitte und die Grösse der Winkel der Axen sind dann für das betreffende Mineral wesentliche Kennzeichen, sie bilden die Elemente der Grundform, die man kennen muss, um alle übrigen Formen des betreffenden Minerals ableiten und darstellen zu können. Dies gilt ebenso für die Darstellung im Modell wie für die Abbildung nach irgend einer Zeichenmethode. Während jedoch im Modell die Elemente nach ihrer wirklichen Grösse erscheinen, sind die Axenlängen im Bild mehr oder weniger verkürzt, die Winkel sämtlich oder doch teilweise grösser oder kleiner, je nach der Richtung, von der aus man den dargestellten Körper betrachtet und auf eine Ebene projiciert.

Am leichtesten wird die Darstellung nach einer Methode, die gestattet, die einmal gewählte Richtung und Länge der Axen zu erkennen, und somit ermöglicht, die Koordinaten leicht und richtig abzutragen. Zu diesem Zweck ist bei den folgenden Zeichnungen das quadrierte Papier gewählt.

§ 10. Elemente der Grundformen. Isomorphie. Mineralien, deren Formen sich auf Grundformen mit denselben Elementen zurückführen lassen, die aber in ihren übrigen Eigenschaften verschieden sind, heissen gleichgestaltet oder isomorph. Da im regulären System die Winkel und Axen alle gleichwertig sind, so sind auch alle in diesem System krystallisierten Körper isomorph, und die Mannigfaltigkeit der Formen wird nur durch die verschiedenen Werte von m und n bedingt. Im quadratischen und hexagonalen System unterscheiden sich die Grundformen nur durch das Verhältnis der Länge der Nebenaxen zur Hauptaxe, also die Grösse $a:c$, im rhombischen System sind zwei Grössen veränderlich $a:b$ und $b:c$; im monosymmetrischen System ist ausserdem noch ein Winkel veränderlich, also im ganzen 3 Elemente. Im asymmetrischen System, das den all-

gemeinsten Fall darstellt, sind ausser $a:b$ und $b:c$ noch 3 Winkel, also im ganzen 5 Elemente veränderlich. Die Bestimmung dieser Elemente aus den Winkeln, welche die Flächen der Grundform untereinander oder mit anderen Flächen bilden, ist eine Hauptaufgabe der Krystallberechnung. Je eine Winkelmessung ermöglicht hierbei die Bestimmung eines Elementes oder auch, wenn diese bestimmt sind, einer der Ableitungszahlen m und n.

II. Kapitel.

Die vollständigen einfachen Formen. Kombinationen von Flächen, deren Centraldistanz gleich 1 ist.

I. Das asymmetrische oder trikline System.

§ 11. Pyramidenflächen. In Fig. 9 ist ein Oktant dargestellt, der von den 3 positiven Axenabschnitten eines schiefwinkeligen Axenkreuzes gebildet wird. Jede der Flächen $A_1B_1C_1$, $A_1B_1C_2$, $A_1B_2C_1$, $A_2B_1C_1$, $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$ schneidet die 3 Axen in endlicher Entfernung und kann als Fläche der Grundform angesehen werden. Derartige Flächen heissen Pyramidenflächen.

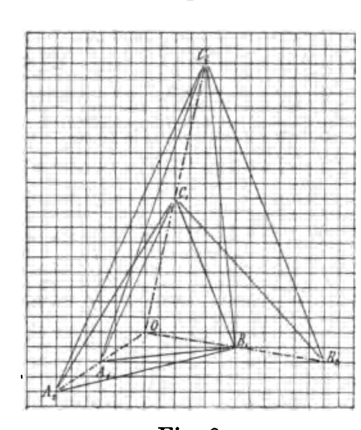


Fig. 9.

Wählt man die Fläche $A_1B_1C_1$ als Fläche der Grundform, so hat sie das Axenverhältnis $a:b:c$ und wird mit P bezeichnet. Für die übrigen Flächen ergeben sich dann, wenn man die Zahl m für die C-Axe (Vertikalaxe) und n für die kürzere A-Axe (Brachydiagonale oder Brachyaxe) oder die längere B-Axe (Makrodiagonale oder Makroaxe) nimmt und zur näheren Bezeichnung der beiden letzteren das Zeichen der Kürze ◡ oder Länge — beifügt und m stets vor und n nach P setzt, folgende Bezeichnungen:

$A_1B_1C_2 = a:b:mc = mP$ Vertikalpyramidenfläche,

$A_1B_2C_1 = a:nb:c = \bar{P}n$ Makropyramidenfläche,

$A_2B_1C_1 = na:b:c = \breve{P}n$ Brachypyramidenfläche,

$A_1B_2C_2 = a:nb:mc = m\bar{P}n$ Makropyramidenfläche,

$A_2B_1C_2 = na:b:mc = m\breve{P}n$ Brachypyramidenfläche.

Diese Bezeichnungen würden sich auch nicht ändern, wenn m

beliebige grössere Werte als 1 und n irgend eine andere grössere Zahl als 1 wäre, statt wie im hiergewählten Beispiel $m = 2$ und $n = 2$. Wäre statt der Fläche $A_1 B_1 C_1$ etwa die Fläche $A_2 B_1 C_2$ als Grundform P gewählt, so würden sämtliche Bezeichnungen zu ändern sein, es würde z. B. $A_1 B_1 C_1$ das Axenverhältnis $\frac{1}{2}a : b : \frac{1}{2}c$ oder was dasselbe wäre (damit $n > 1$ wird) $a : 2b : c$ erhalten, also eine Makropyramidenfläche $\bar{P}n$ werden, $A_1 B_2 C_2$ hätte das Axenverhältnis $\frac{1}{2}a : 2b : c$ oder $a : 4b : 2c$, und wäre als $m\bar{P}n$ oder $2\bar{P}4$ zu bezeichnen.

Zu jeder Fläche gehört bei einer vollständigen (holoedrischen) Form notwendig die parallele Gegenfläche, dagegen ist dieses Flächenpaar von den Flächen mit gleichem Axenverhältnis in den übrigen Oktanten, da diese andere Winkel haben, unabhängig. Will man dies hervorheben, so bezeichnet man die Lage in einem der Oktanten durch einen beigefügten Strich an der betreffenden Stelle. Es würde also z. B. P' die Fläche der Grundform in dem Oktant vorn, rechts, oben und die parallele Gegenfläche bedeuten. Man nennt ein solches Flächenpaar auch eine Viertelpyramide. Da durch ein Flächenpaar der Raum nicht allseitig begrenzt werden kann, so nennt man eine solche Form eine „offene", sie kann für sich allein nicht vorkommen. Fig. 10, welche die Grundform mit sämtlichen 8 Flächen darstellt, ist dagegen eine geschlossene Form. Fällt von den 4 Flächenpaaren eines, etwa P', weg, so bilden die übrigen drei Viertelpyramiden doch noch eine geschlossene Form. Die Flächen der 3 anliegenden Oktanten schneiden sich dann in der neuen Ecke P mit den Koordinaten $x = y = z = 1$ und die entstehende Figur, welche eine Kombination der 3 Formen $'P$, $P_{,}$, $,P$ darstellt, wird von 6 Parallelogrammen begrenzt.

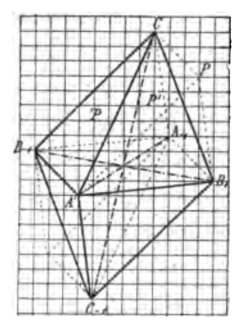


Fig. 10.

§ 12. Prismen und Domen. Eine Pyramidenfläche bekommt eine um so steilere Lage, je grösser m wird (vergl. die Flächen $A_1 B_1 C_1$ und $A_1 B_1 C_2$ Fig. 9). Nimmt m den Wert ∞ (unendlich) an, so heisst das, die Fläche $A_1 B_1 C_\infty$ geht mit der C-Axe parallel, und fällt, da $+\infty$ und $-\infty$ gleichbedeutend sind, mit der anstossenden Fläche $A_1 B_1 \underline{C}_\infty$ in eine Ebene. Solche mit einer Axe parallele Flächen heissen Prismenflächen (Vertikalprismenflächen), wenn die Axe die Vertikalaxe ist; Domenflächen (von δῶμα Dach) (Quer- oder Längsprismenflächen), wenn sie mit einer der anderen Axen parallel gehen, also wenn $n = \infty$ wird.

Während es bei Pyramidenflächen je 4 Flächenpaare mit gleichem Axenverhältnis gibt, gehören bei den prismatischen Formen stets nur zwei Flächenpaare (Hemiprismen und Hemidomen) zusammen, sind aber ebenso wie die Pyramidenflächenpaare von einander unabhängig. Sie begrenzen den Raum auch dann nicht vollständig, wenn sie zusammen vorkommen, sind vielmehr bei den Vertikalprismen oben und unten, bei den Brachydomen oder Längsprismen vorn und hinten und bei den Makrodomen oder Querprismen links und rechts offen. Da bei den Vertikalprismen sich n auf die Brachy-Axe oder die Makro-Axe beziehen kann oder auch gleich 1 werden kann, so ergeben sich 3 Arten von Prismen

$a : b : \infty c = \infty{'}P$ oder $\infty P{'}$ Prismäres Prisma,
$na : b : \infty c = \infty{'}\breve{P}n$ oder $\infty\breve{P}{'}n$ Brachyprisma,
$a : nb : \infty c = \infty{'}\bar{P}n$ oder $\infty\bar{P}{'}n$ Makroprisma.

Die Bezeichnung der Domen ist:

$\infty a : b : c = {,}\breve{P}{'}\infty$ oder ${'}\breve{P}{,}\infty$ oder auch bloss $\breve{P}{'}\infty$ und ${'}\breve{P}\infty$,
$\infty a : b : mc = m\breve{P}{'}\infty$ oder $m{'}\breve{P}\infty$ Brachydomen (oder Hemibrachydomen) und

$a : \infty b : c = {'}\bar{P}{'}\infty$ oder ${,}\bar{P}{,}\infty$ oder einfach $\bar{P}{'}\infty$ und $\bar{P}{,}\infty$,
$a : \infty b : mc = m\bar{P}{'}\infty$ oder $m\bar{P}{,}\infty$ Makrodomen (oder Hemimakrodomen).

§ 13. Pinakoide oder Endflächen. Ist eine Fläche zu zwei Axen parallel, so heisst sie eine Endfläche oder ein Pinakoid. Hierbei sind 3 Fälle möglich:

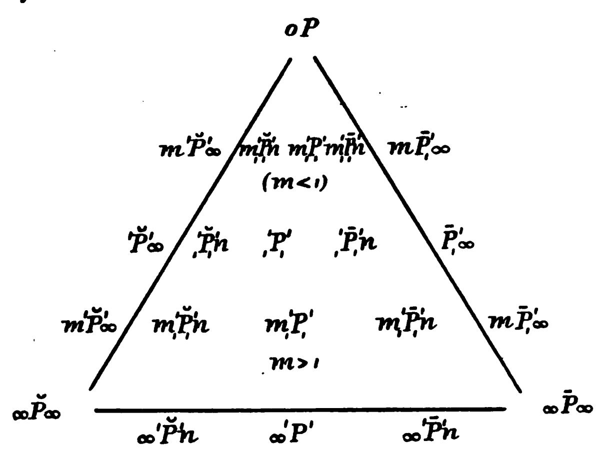
Die Fläche geht mit der Vertikalaxe und der Brachyaxe parallel, oder mit der Vertikalaxe und der Makroaxe oder endlich mit der Brachyaxe und der Makroaxe. In jedem Fall besteht die Form aus nur einem Flächenpaar.

$\infty a : b : \infty c = \infty\breve{P}\infty$ das Brachypinakoid oder die Längsfläche entsteht aus einem Brachyprisma, indem $n = \infty$ wird, oder auch aus einem Brachydoma, indem $m = \infty$ wird, in beiden Fällen fallen je zwei Flächen dieser Formen in eine Ebene. $a : \infty b : \infty c = \infty\bar{P}\infty$ das Makropinakoid oder die Querfläche entsteht in ähnlicher Weise aus dem Makroprisma oder dem Makrodoma.

$\infty a : \infty b : c$ oder indem man durch ∞ dividiert $a : b : \frac{1}{\infty} c = a : b : 0c = 0P$ das basische Pinakoid oder kurz die Basis auch Geradendfläche genannt, kann sowohl aus den Domen, indem $m = \infty$ wird, als auch aus den Pyramiden, indem $m = 0$ wird, abgeleitet werden. Die Pinakoide sind parallel zu den Axenebenen, die

man in diesem System als brachydiagonalen, makrodiagonalen und basischen Hauptschnitt unterscheidet.

§ 14. **Uebersicht der asymmetrischen Formen.** Das folgende Schema umfasst sämtliche Formen des asymmetrischen oder triklinen Systems.



Das Dreieck umschliesst alle Pyramiden, die sämtlich in Viertelpyramiden zerfallen, sie gehen, indem $m = \infty$ wird, über in die Prismen und zwar die Brachypyramiden in Brachyprismen, die Makropyramiden in Makroprismen, die wiederum in rechte und linke Hemiprismen zerfallen. Wird $n = \infty$, so gehen die Pyramiden über in Domen und zwar die Brachypyramiden in Brachydomen oder Längsprismen und die Makropyramiden in Makrodomen.

§ 15. **Beispiele von Kombinationen.** In den Fig. 11, 12 und 13 sind weitere Beispiele für die Kombination von je 3 Flächenpaaren zu geschlossenen Formen gegeben. Während bei Fig. 10 der Kombination von 3 Paar Pyramidenflächen die Axen je zwei gegenüberliegende Ecken verbinden, gehen bei Fig. 11 der Kombination der 3 Pinakoide, dem sog. Pinakoidalkörper, die Axen durch die Mitte der Flächen.

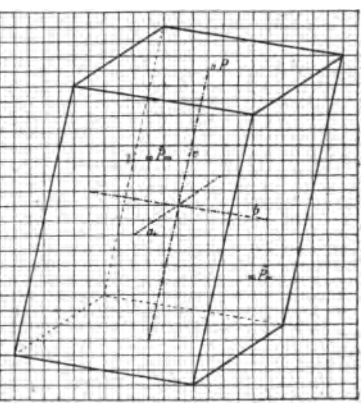


Fig. 11.

[Die Ecken haben die Koordinaten $x = a$ $y = b$ $z = c$ beziehungsweise $x = a$ $y = b$ $z = -c$ u. s. w.]

In Fig. 12 ist die Kombination zweier Prismenflächen mit einem Pinakoid dargestellt. Da hierbei die beiden Prismenflächen dasselbe Axenverhältnis haben, gehen zwei Axen durch die mit der Vertikalaxe parallelen Kanten, während diese letztere die Mitten der Grundflächen verbindet. In Fig. 13 ist die Kombination zweier verschiedenen Prismenflächen mit der Basis dargestellt. Die Lage der Ecke, in der die drei Flächen sich treffen, ergiebt sich, wie aus der Figur

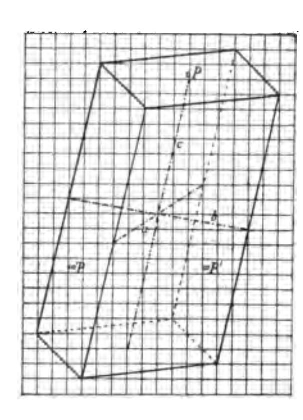


Fig. 12.

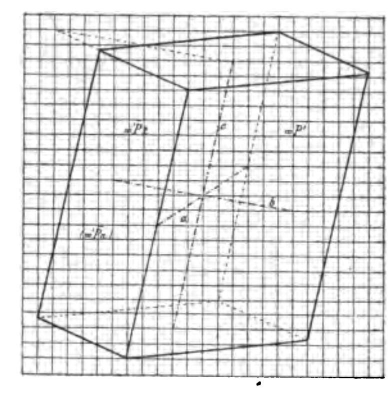


Fig. 13.

ersichtlich ist, durch den Schnitt zweier Kanten in der Endfläche, von denen die eine die beiden Axen in der einfachen, die andere die eine in der einen, die andere in der $n$fachen Entfernung schneidet

Die Berechnung der Koordinaten geschieht mit Hilfe der Determinante $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{vmatrix}$ und ergiebt (vergl. § 2): $x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{1}{3}$, $y = \frac{a_1 - a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = -\frac{4}{3}$.

Die Zeichnung der entsprechenden Kombinationen mit Domenflächen ergiebt sich von selbst. Ein schiefwinkeliges Parallelepipedon in verschiedenen Stellungen vermittelt die Anschauung.

III. Kapitel.

Das monosymmetrische oder monokline System.

§ 16. Das Axenkreuz. Während im asymmetrischen System die drei Hauptschnitte der Grundform Rhomboide sind und jeder derselben sowohl brachydiagonaler als makrodiagonaler oder basischer Hauptschnitt sein kann, sind im monosymmetrischen oder monoklinen

System zwei der Hauptschnitte Rhomben, der dritte, in welchen die beiden schiefwinkeligen Axen fallen, dagegen ein Rhomboid. Dieses letztere ist die Symmetrieebene und man bezeichnet sie als klinodiagonalen Hauptschnitt. Wählt man eine der beiden schiefen Axen zur Vertikalaxe oder *C*-Axe, so wird die andere als *A*-Axe oder Klinodiagonale oder Klinoaxe bezeichnet, während für die dritte auf beiden anderen Axen senkrechte Axe, welche zugleich die Symmetrieaxe ist, die Bezeichnung Orthodiagonale oder Orthoaxe (*B*-Axe) eingeführt ist.

§ 17. Zeichnen in Parallelperspektive. Für die Zeichnung empfiehlt es sich nun, damit der wichtige Winkel β der beiden schiefen Axen seiner wahren Grösse nach erscheint, die Symmetrieebene zugleich als Projektionsebene zu wählen. Die beiden in dieselben fallenden Axen erscheinen dabei zugleich in ihrer wirklichen Länge, wobei man am besten eine der Axen, etwa die Klinoaxe mit einer horizontalen Linie des quadrierten Papieres zusammenfallen lässt.

Die Lage der Orthoaxe in der Zeichnung hängt dann davon ab, von welchem Punkt aus man das Axenkreuz betrachtet, also von einer Uebereinkunft. In den folgenden Zeichnungen ist derselbe stets so gewählt, wie in Fig. 14, d. h. derart, dass die Richtung der

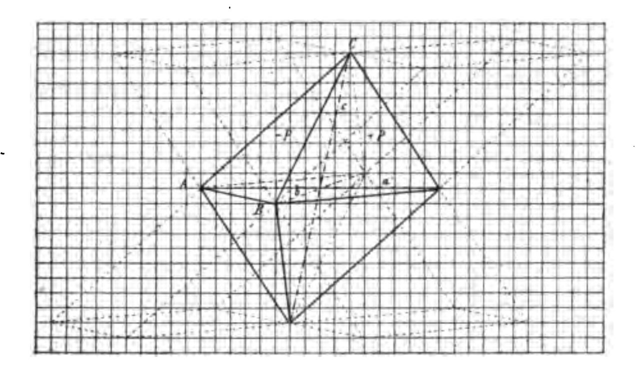


Fig. 14.

Linie *OB* von der oberen rechten Ecke eines Quadrats nach der linken unteren Ecke des dritten Quadrats links geht. Die Verkürzung dieser Linie ist dann so, dass die Entfernung $OB = b$ in der Richtung der Axe *A* gleich 9 Quadratseiten wäre, also $\frac{\sqrt{10}}{9}$, so dass in Fig. 14 $a = {}^{8}/_{9}\, b$ ist. Dieselbe Verkürzung ist dann bei allen Linien in dieser Richtung (die Koordinaten x) beizubehalten.

§ 18. **Die Hemipyramiden.** Die Ableitung der Formen im monosymmetrischen System erfolgt ebenso wie im asymmetrischen System aus der Grundform. Diese (Fig. 14) zerfällt nicht in vier Flächenpaare (Viertelpyramiden), sondern, da je zwei an der Symmetrieebene anliegende Oktanten gleich werden, in zwei sog. Hemipyramiden, die von einander unabhängig sind und für sich an zwei Seiten offene prismatische Räume darstellen, die sich von den eigentlichen Prismen und Domen nur dadurch unterscheiden, dass sie nicht mit einer Axe parallel sind, sondern mit den kürzeren oder den längeren in den klinodiagonalen Hauptschnitt fallenden Kanten der Grundform. Im ersteren Fall bilden die vier dem spitzen Winkel der schiefen Axen gegenüberliegenden Flächen die positiv genannte Hemipyramide $+P$, die vier anderen, dem stumpferen Winkel gegenüberliegende Flächen die negative Hemipyramide $-P$.

Ganz in derselben Weise zerfallen alle übrigen Pyramiden in Hemipyramiden. Man unterscheidet auch in diesem System drei Arten, nämlich:

$$a: \ b : mc = \pm mP \quad \text{Vertikalpyramiden,}$$
$$na: \ b : mc = \pm m\not{P}n \quad \text{Klinopyramiden,}$$

wobei durch den schiefen Strich durch P angedeutet wird, dass die schiefe Klinoaxe in der $n$fachen Entfernung geschnitten wird, während ein wagrechter Strich durch P auf die Orthoaxe hinweist, also:

$$a : nb : mc = \pm m\bar{P}n \quad \text{Orthopyramiden.}$$

§ 19. **Die Prismen und Domen.** Bei den prismatischen Formen unterscheidet man ebenso:

$$a: \ b : \infty c = \infty P \quad \text{das primäre Prisma,}$$
$$na: \ b : \infty c = \infty \not{P}n \quad \text{das Klinoprisma,}$$
$$a : nb : \infty c = \infty \bar{P}n \quad \text{das Orthoprisma.}$$

Diese Prismen zerfallen jedoch nicht in Hemiprismen, vielmehr erfordert die Symmetrie, dass, wenn die rechte vordere Prismenfläche mit ihrer Gegenfläche vorhanden ist, auch die linke, welche den gleichen Winkeln gegenüberliegt, nicht fehlt. Ein Gleiches gilt für:

$$\infty a: \ b : mc = m\not{P}\infty \quad \text{die Klinodomen,}$$

wobei ebenfalls die Flächen zu beiden Seiten der Symmetrieebene sich gegenseitig bedingen. Dagegen zerfallen:

$$a : \infty b : mc = m\bar{P}\infty \quad \text{die Orthodomen}$$

in zwei Hemiorthodomen:

$$+m\bar{P}\infty \quad \text{und} \quad -m\bar{P}\propto,$$



von denen das erstere Flächenpaar dem spitzen Winkel der schiefen Axen gegenüberliegt und aus $+ m P n$ entsteht, indem $n = \infty$ wird, während das letztere dem stumpfen Winkel gegenüberliegt, beide senkrecht zur Symmetrieebene.

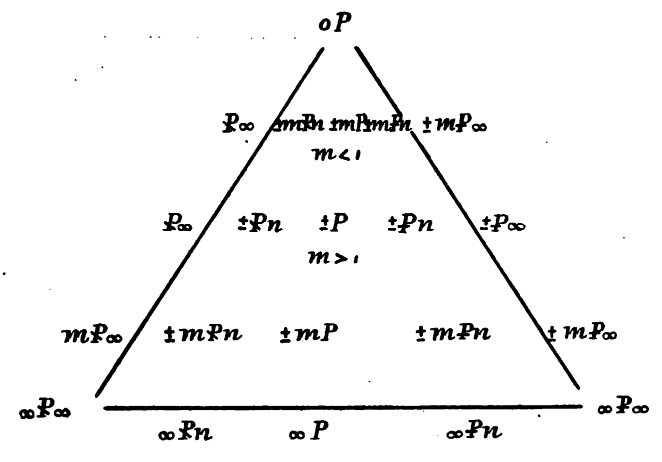
Bei den Pinakoiden endlich ist nur Brachy- mit Klino- und Makro- mit Ortho-Pinakoid zu vertauschen, also:

$\infty a : \infty b : \; c = 0 P$ Basis,

$\infty a : \; b : \infty c = \infty P \infty$ Klinopinakoid,

$a : \infty b : \infty c = \infty P \infty$ Orthopinakoid.

§ 20. **Übersicht der monosymmetrischen Formen.** Das Schema, welches alle Flächen des monosymmetrischen oder monoklinen Systems umfasst, erfährt nur wenige Änderungen:



§. 21. **Monosymmetrische Kombinationen:** Die Fig. 14 zeigt die Grundform $\pm P$ und zugleich die beiden Hemipyramiden

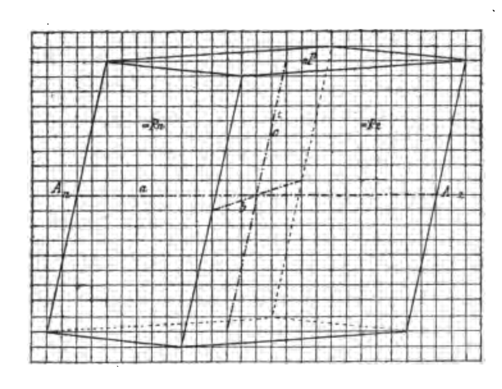


Fig. 15.

durch die Basis geschlossen. Zur Zeichnung der übrigen Pyramiden sind nur die Längen der Axen entsprechend zu ändern. Fig. 15 entspricht der Fig. 12 und ist eine Kombination der beiden Formen

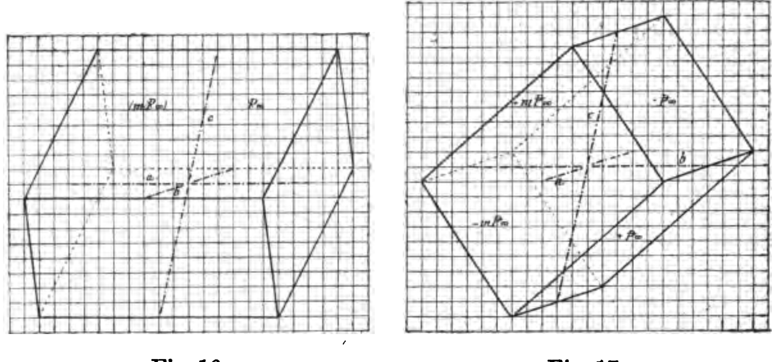


Fig. 16. Fig. 17.

∞P2 und 0*P* ($a:b = 0{,}66\overline{6}:1$). In Fig. 16 ist das Klinodoma *m*P∞ mit dem Orthopinakoid ∞P∞ und in Fig. 17 die dreizählige Kombination +*m*P∞, —*m*P∞ und ∞P∞ dargestellt mit ($a:b = 0{,}88\overline{8}:1$).

IV. Kapitel.

Das rhombische System.

§ 22. Das rhombische Axenkreuz. Von den drei auf einander senkrecht stehenden Axen, welche den Krystallgestalten des rhombischen Systems zu Grunde gelegt werden, kann jede als Vertikalaxe oder *C*-Axe aufrecht gestellt werden. Die kürzere der beiden anderen Axen wird dann als Brachyaxe oder *A*-Axe von vorn nach hinten, die längere als Makroaxe oder *B*-Axe von links nach rechts gestellt. Die drei Axenebenen, welche zugleich Symmetrieebenen sind, teilen den Raum in acht gleiche Teile. Jede Fläche, die in einem Oktant vorkommt, erscheint demgemäss auch in jedem anderen. Daher wird die Grundform und jede andere rhombische Pyramide von acht Flächen begrenzt und zerfällt nicht in Viertel- oder Hemipyramiden. Alle acht Flächen sind kongruente oder symmetrische, ungleichseitige Dreiecke. Die drei Arten von Kanten kann man als makrodiagonale und brachydiagonale Polkanten

(die Punkte auf der *C*-Axe werden Pole und die dahin führenden Kanten Polkanten genannt) und als Basiskanten oder Grundkanten bezeichnen, je nachdem sie in den einen oder anderen Hauptschnitt fallen.

§ 23. Die rhombischen Krystallformen. Man unterscheidet auch in diesem System drei Arten von Pyramiden, gleich denen des asymmetrischen oder triklinen Systems:

$a:\ b:mc = mP$ Vertikalpyramiden,

$na:\ b:mc = m\breve{P}n$ Brachypyramiden,

$a:nb:mc = m\bar{P}n$ Makropyramiden.

Alle prismatische Formen werden von vier Flächen unvollständig begrenzt:

$a:\ b:\infty c = \infty P$ Primäres Prisma,

$na:\ b:\infty c = \infty\breve{P}n$ Brachyprismen,

$a:\ nb:\infty c = \infty\bar{P}n$ Makroprismen,

$\infty a:\ b: mc = m\breve{P}\infty$ Brachydomen,

$a:\infty b: mc = m\bar{P}\infty$ Makrodomen.

Es giebt also weder Hemiprismen noch Hemidomen. Die Pinakoide heissen auch hier:

$\infty a:\infty b:\ c = 0P$ Basis,

$\infty a:\ b:\infty c = \infty\breve{P}\infty$ Brachypinakoid,

$a:\infty b:\infty c = \infty\bar{P}\infty$ Makropinakoid.

Fig. 18 zeigt die rhombische Grundform mit dem Axenverhältnis $a:b:c = 0{,}66\overline{6}:1:1{,}33\overline{3}$ [während dieses Verhältnis bei den Krystallen irrational ist, ist es für die Zeichnung durchweg durch ein rationales

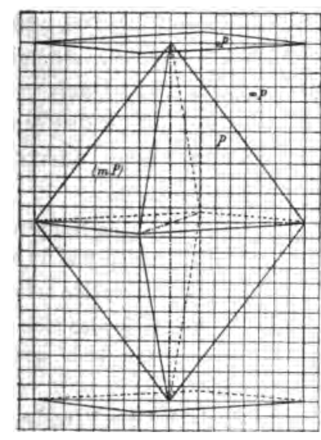
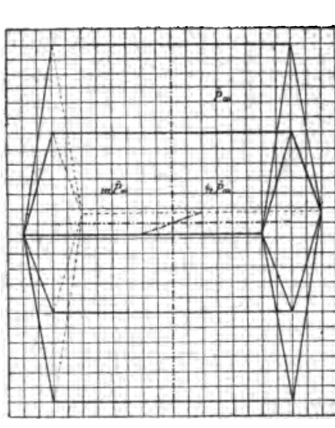


Fig. 18.


Fig. 19.

zu ersetzen]. Nimmt man als Axenverhältnis der Grundform $a:b:c = 0{,}6\overline{66} : 1 : 0{,}33\overline{3}$, so würde die Zeichnung die Vertikalpyramide $mP = 4P$ darstellen, die mit der Grundform die Basiskanten gemein hat. In gleicher Weise hat jede Brachypyramide $m\breve{P}n$ mit der Vertikalpyramide mP bei gleichem m auch gleiche makrodiagonale Polkanten. Wird $m = \infty$, so fallen je zwei Polkanten in eine gerade Linie, ebenso bei $n = \infty$ je zwei Basiskanten und je zwei makrodiagonale

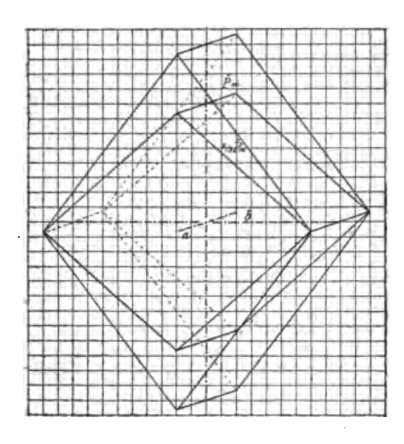


Fig. 20.

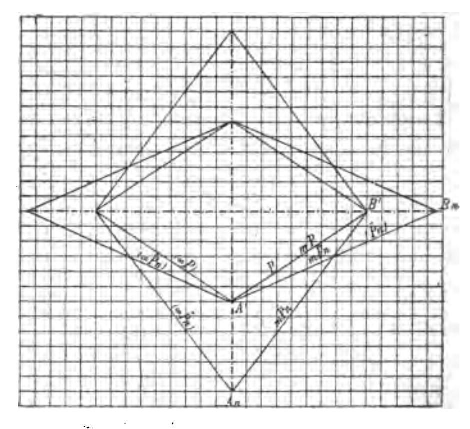


Fig. 21.

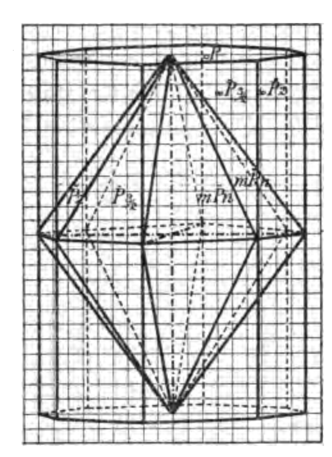


Fig. 22.

und brachydiagonale Polkanten, je nachdem es ein Makrodoma Fig. 19 oder ein Brachydoma Fig. 20 ist. In Fig. 19 sind zwei Makrodomen zusammengestellt, ein steileres und ein flacheres, ebenso in Fig. 20 zwei Brachydomen. Je grösser m ist, desto steiler wird das Dach (δῶμα). Die Brachydomen sind durch das Makropinakoid, die Makrodomen durch das Brachypinakoid geschlossen.

Fig. 21 zeigt den basischen Hauptschnitt durch die rhombischen Pyramiden und Prismen. Die Basiskanten einer Makropyramide $m\bar{P}n$ und einer Brachypyramide $m\breve{P}n_1$ schneiden sich dabei in vier Punkten, deren Lage sich aus der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n_1} & 1 \end{vmatrix}$ berechnen lässt. $x = \dfrac{1 - \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{nn_1}}\, a$ wird bei $n = {}^3/_2$ und $n_1 = 2$,

wie in der Fig. 21 angenommen ist, $= {}^1/_2 a$, $y = \frac{1 - \frac{1}{n_1}}{1 - \frac{1}{n n_1}} b = {}^3/_4 b$. Man findet also die vier Schnittpunkte in der Zeichnung, indem man $x = {}^1/_2\, a = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ Einheiten nach oben und unten und $y = {}^3/_4\, b = {}^3/_4 \cdot 9 = 6\,{}^3/_4$ Einheiten nach rechts und links geht. Die Fig. 21 zeigt, wie kleine Ungenauigkeiten in der Führung der Linien Verschiebungen des Schnittpunktes bewirken, die durch Abzählen der Koordinaten zu vermeiden sind.

Fig. 22 vereinigt zwei Kombinationen, eine Brachypyramide und eine Makropyramide mit gleichem m und Brachyprisma, Makroprisma und Basis. Die Basiskanten ändern sich nicht, wenn sich m allein ändert. Je zwei Pyramidenflächen fallen bei $m = \infty$ in eine Ebene.

V. Kapitel.

Das quadratische oder tetragonale System.

§ 24. Die ditetragonale Pyramide. Das quadratische oder tetragonale System unterscheidet sich vom rhombischen dadurch, dass die A-Axe und B-Axe gleichwertig sind und vertauscht werden können, ohne dass das Axenverhältnis der Flächen sich ändert, derart, dass die Fläche $A_1\, B_n\, C_m$ und $A_n\, B_1\, C_m$ Flächen derselben Form sind, während es im rhombischen System Makro- und Brachypyramidenflächen sind, wie in Fig. 22. Die Bezeichnung als A-Axe und B-Axe wird daher nur zur Unterscheidung der Richtung nach vorn oder hinten, und links oder rechts beibehalten. Jede Fläche hat in jedem Oktant noch eine zugehörige Fläche mit gleichem Axenverhältnis, so dass der allgemeinste Fall in diesem System dargestellt wird durch eine von 16 Flächen begrenzte achtseitige oder ditetragonale Pyramide mit dem Axenverhältnis $a : na : mc = mPn$ (Fig. 23). Diese 16 Flächen schneiden sich in 24 Kanten, von denen je acht untereinander gleich sind. Die acht in den basischen Hauptschnitt fallenden Kanten schneiden sich in acht Ecken. Von diesen liegen vier auf den im

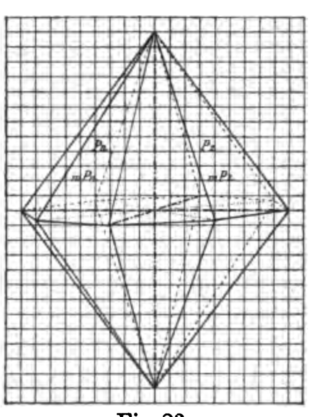


Fig. 23.

Gegensatz zur Hauptaxe C Nebenaxen genannten gleichwertigen Axen und werden primäre Basisecken genannt, während die vier anderen Ecken, welche auf den den Winkel der Nebenaxen halbierenden sog. Zwischenaxen liegen, sekundäre Basisecken oder Zwischenecken heissen. Die acht Kanten, welche die Polecken auf der C-Axe mit den primären Basisecken, also den Endpunkten der Nebenaxen, verbinden, werden primäre Polkanten, die acht Kanten, welche die sekundären Basisecken oder Zwischenecken mit den Polecken verbinden, sekundäre Polkanten genannt. Ebenso

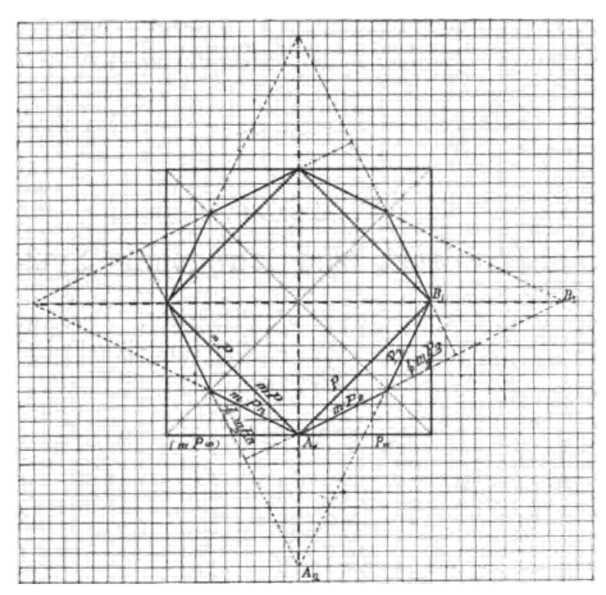


Fig. 24.

unterscheidet man zwei primäre und zwei sekundäre Hauptschnitte, von denen die ersteren durch die Hauptaxe und eine Nebenaxe, die letzteren durch die Hauptaxe und eine Zwischenaxe gelegt sind. Der basische Hauptschnitt ist Hauptsymmetrieebene, die primären und sekundären Hauptschnitte gewöhnliche Symmetrieebenen. Durch die fünf Symmetriebenen wird der Raum in 16 gleiche Raumteile geteilt, von denen jeder durch je einen von den drei Arten von Hauptschnitten begrenzt wird.

Aus den ditetragonalen Pyramiden mPn lassen sich die übrigen Formen des Systems ableiten, indem man untersucht, in welchen Fällen zwei oder mehr Flächen in eine Ebene fallen. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1) $n = 1$, 2) $n = \infty$, 3) $m = \infty$.

§ 25. Pyramiden erster Ordnung. 1) Wird $n = 1$, so fällt eine Fläche $A_1 B_n C_m$ mit $A_n B_1 C_m$ in eine Fläche $A_1 B_1 C_m$ zusammen, und es entsteht eine Form, die in jedem Oktanten nur eine Fläche zeigt, bei der die sekundären Basisecken und Polkanten wegfallen, und nur die primären Basisecken und Polkanten bleiben. Eine solche tetragonale Pyramide mit dem Axenverhältnis $a : a : mc = mP$ heisst eine primäre Pyramide oder Pyramide erster Ordnung (Fig. 25). Von diesen Pyramiden stellt die Grundform P den speziellen Fall dar, in dem $m = 1$ ist.

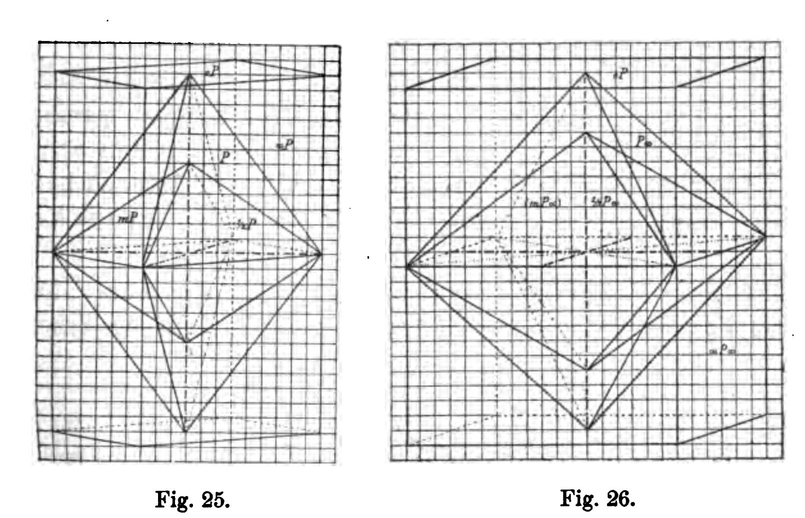


Fig. 25. Fig. 26.

§ 26. Pyramiden zweiter Ordnung. 2) Wird $n = \infty$, so fallen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_{-n} C_m$, die in einer primären Polkante zusammenstossen, in eine Fläche $A_1 B_\infty C_m$ ($+\infty = -\infty$). Die primären Basisecken und Polkanten fallen dabei weg, und es bleiben nur die sekundären Basisecken und Polkanten übrig. Hierbei entstehen die sekundären tetragonalen Pyramiden oder Pyramiden zweiter Ordnung (Fig. 26) mit dem Axenverhältnis $a : \infty a : mc = mP\infty$. Die entsprechenden rhombischen Formen sind die Domen; die von acht gleichschenkligen Dreiecken begrenzten Formen gleichen einer Kombination eines Makrodomas $m\bar{P}\infty$ mit einem Brachydoma $m\breve{P}\infty$ mit gleichem m.

§ 27. Die tetragonalen Prismen. 3) Wird $m = \infty$, so fallen je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, z. B. $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ in die Fläche $A_1 B_n C_\infty$, und die Pyramide verwandelt sich damit in ein Prisma. Aus den dite-

tragonalen Pyramiden mPn entstehen **ditetragonale** oder **achtseitige Prismen** $\infty Pn = a : na : \infty c$ (Fig. 27), aus den primären Pyramiden mP wird das **primäre Prisma** oder **Prisma erster Ordnung** $\infty P = a : a : \infty c$ (Fig. 25) und aus den sekundären Pyramiden $mP\infty$ das **Prisma zweiter Ordnung** $\infty P\infty = a : \infty a : \infty c$, von dessen Flächen zwei wie das Brachypinakoid $\infty\breve{P}\infty$ und zwei wie das Makropinakoid $\infty\bar{P}\infty$ liegen (Fig. 26).

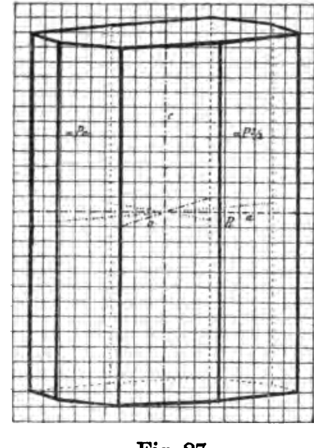
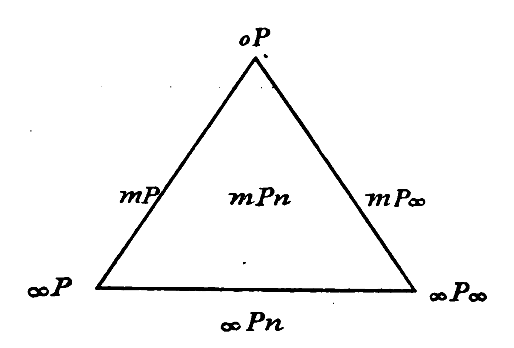


Fig. 27.

Wird $m = 0$, so fallen alle Pyramidenflächen in den basischen Hauptschnitt. Die zu diesem parallelen Flächen mit dem Axenverhältnis $a : a : 0c = \infty a : \infty a : c = 0P$ heissen auch hier **Basis** oder **basisches Pinakoid**. (Vergl. Fig. 25, 26, 27.)

§ 28. **Uebersicht der tetragonalen Formen.** Diese sieben Formen des tetragonalen Systems vereinigt folgendes Schema:



In der Mitte steht die ditetragonale Pyramide, aus der sich alle übrigen Formen ableiten lassen, an der linken Seite sind die primären Pyramiden, rechts die sekundären Pyramiden und an der Basis des Dreiecks die daraus bei $m = \infty$ entstehenden Prismen, an der Spitze endlich steht das Pinakoid.

§ 29. **Zeichnen der tetragonalen Formen.** Fig. 23 zeigt eine ditetragonale Pyramide $mP2$, die $P2$ ist, wenn $a : c = 1 : 1{,}33\bar{3}$ ist, dagegen $2P2$, wenn $a : c = 1 : 0{,}66\bar{6}$ angenommen würde.

Die sekundären Basisecken haben im allgemeinen die Koordinaten $x = y = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$, wie sich aus der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{vmatrix}$ ableiten lässt, bei der $a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = 1 - \frac{1}{n}$ durch die Determinante $= 1 - \frac{1}{n^2}$ geteilt $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$ giebt. OR ist also $= \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{n}}$. ($R$ sei die sekundäre Basisecke.)

Die primären und sekundären Polkanten sind ungleich lang.

Beweis: Wären die Polkanten gleich, so müssten auch die Nebenaxen OA und Zwischenaxen OR gleich sein, da die Dreiecke COA und COR kongruent wären. Es wäre $OR^2 = 2x^2 = OA^2 = 1$, mithin:

$$x^2 = \frac{1}{2} \text{ und } x = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ und } n = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$

also eine irrationale Grösse, was dem ersten krystallographischen Grundgesetz widerspricht. Aus demselben Grund kann auch der basische Hauptschnitt kein regelmässiges Achteck sein. Ist $n > \sqrt{2}+1$, so sind die sekundären Polkanten länger als die primären, bei $n < \sqrt{2}+1$ ist es umgekehrt.

Fig. 27 zeigt die Kombination des ditetragonalen Prismas $\infty P^3/_2$ mit der Basis $0P$. Die Polkanten verwandeln sich dabei in Seitenkanten.

Der Winkel an den sekundären Seitenkanten ist stumpfer, als der an den primären Seitenkanten; bei $n > \sqrt{2}+1$ wäre es umgekehrt.

Fig. 25 vereinigt eine stumpfe und eine spitze Pyramide erster Ordnung und die Kombination des Prismas erster Ordnung mit der Basis. Die primären Polkanten werden um so länger und steiler, je grösser das Verhältnis $c:a$ und die Ableitungszahl m ist. Wird $m = \infty$, so verwandeln sich die Polkanten in primäre Seitenkanten. Der basische Hauptschnitt ist in allen Fällen ein Quadrat. Die Pyramidenflächen sind gleichschenkelige Dreiecke. Die Pyramiden heissen stumpf, wenn die Polkanten kleiner als die Basiskanten und der Winkel an der Spitze grösser als 60° ist, im entgegengesetzten Falle spitz. Zwischen beiden steht die Grundform des regulären Systems, das Oktaeder, bei dem die drei Axen gleich lang sind.

Fig. 26 vereinigt eine stumpfe und eine spitze Pyramide zweiter Ordnung und die Kombination des Prismas zweiter Ordnung mit der Basis. Polkanten und Seitenkanten sind sekundär, wie die Basisecken, deren Koordinaten $x = y = 1$ sind. Der basische Hauptschnitt ist auch hier ein Quadrat, doch liegen die Ecken auf den Zwischenaxen und die Nebenaxen gehen durch die Mitten der Seiten.

VI. Kapitel.

Das hexagonale System.

§ 30. **Das hexagonale Axenkreuz.** Die Ableitung der Formen des hexagonalen Systems erfolgt in ganz ähnlicher Weise, wie bei den tetragonalen Formen. Da durch die eigentümlichen

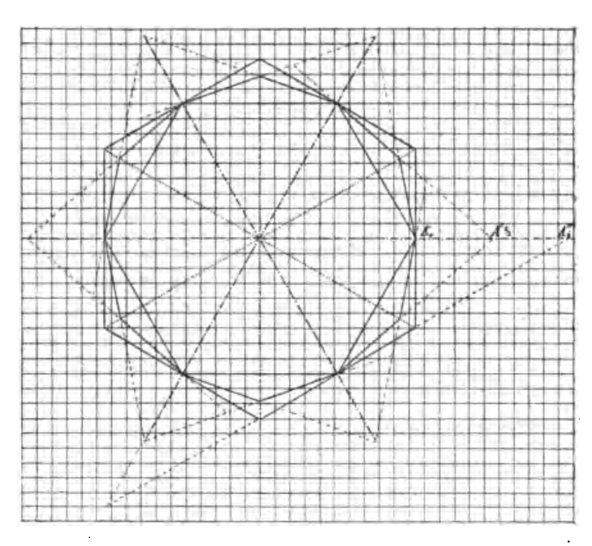


Fig. 28.

Symmetrieverhältnisse sich die Wahl von vier Axen empfiehlt, von denen drei gleichwertig sind (Nebenaxen), während die vierte (Hauptaxe) länger oder kürzer ist, so schneidet eine Fläche im allgemeinen vier Axen. Gleichwohl genügen auch hier zur Bezeichnung zweier verschiedenen Flächen nur zwei Ableitungszahlen, da wenn man die Entfernung, in der eine der Nebenaxen geschnitten wird, $OA = 1$ setzt, die der zweiten $OA' = n$, auch die der dritten $OA'' = s$ damit bestimmt ist. Trägt man

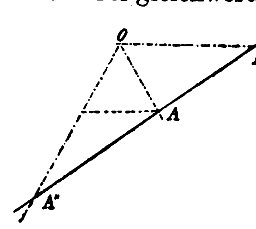


Fig. 29.

$OA = 1$ auf OA' und OA'' von O aus ab und verbindet die gefundenen Punkte mit A, so ergiebt sich die Proportion:

$$s : 1 = n : n - 1, \text{ also } s = \frac{n}{n-1},$$

so dass also das Axenverhältnis einer Fläche im hexagonalen System im allgemeinen heisst:

$$a : na : \frac{n}{n-1} a : mc,$$

wofür abgekürzt das Zeichen mPn durchaus verständlich ist. Auch für die Aufsuchung der Eckpunkte braucht man stets nur drei Axen, ebenso zur Bezeichnung der einzelnen Flächen, wobei man eine der Nebenaxen als A-Axe, eine andere als B-Axe bezeichnet.

§ 31. **Die zwölfseitige (dihexagonale) Pyramide.** In jedem Raumzwölftel (Dodekant) giebt es im allgemeinen zwei Flächen, im ganzen also 24. Die zwölf oberen heissen: $A_1 B_n C_m$, $A_n B_1 C_m$, $A_s B_1 C_m$, $A_{-s} B_n C_m$, $A_{-n} B_s C_m$, $A_{-1} B_{-s} C_m$, $A_{-1} B_{-n} C_m$, $A_{-n} B_{-1} C_m$, $A_{-s} B_{-1} C_m$, $A_s B_{-n} C_m$, $A_n B_{-s} C_m$, $A_1 B_s C_m$, wobei s immer $= \frac{n}{n-1}$ zu setzen ist. Bei den 12 unteren Flächen ist C_m mit C_{-m} zu vertauschen. Diese 24 Flächen, welche die dihexagonale oder 12seitige Doppelpyramide (Fig. 29) begrenzen, sind ungleichseitige Dreiecke. Auch hier unterscheidet man dreierlei Hauptschnitte. Der basische Hauptschnitt (Fig. 28) ist die Hauptsymmetrieebene, ein symmetrisches, aber nicht regelmässiges Zwölfeck mit 12 Basiskanten und mit 6 primären und 6 sekundären Basisecken, welche letzteren auf den die Winkel der Nebenaxen halbierenden Zwischenaxen, welche wie jene Symmetrieaxen auf den 6 gewöhnlichen Symmetrieebenen sind, liegen (und wie im quadratischen System die Koordinaten $x = y = \frac{n}{n+1}$ haben).

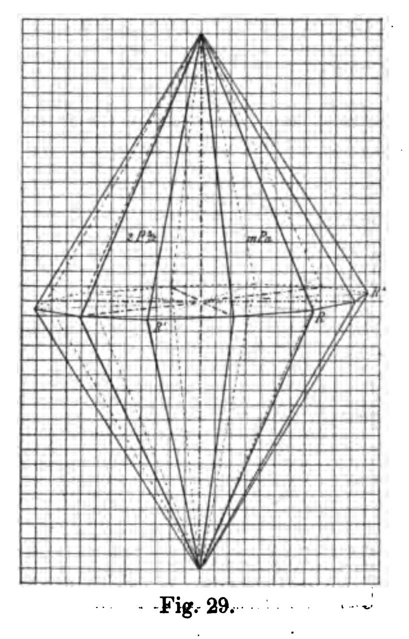


Fig. 29.

Durch die Nebenaxen und die Hauptaxe gehen die 3 primären Hauptschnitte, in welche die 12 primären Polkanten fallen. Durch die Zwischenaxen und die Hauptaxe gehen die 3 sekundären Hauptschnitte mit den 12 sekundären Polkanten, welche die Endpunkte der Zwischenaxen mit den Polen, den Endpunkten der Hauptaxe, verbinden.

§ 32. Zeichnen der hexagonalen Formen.

Zur richtigen Zeichnung des hexagonalen Axenkreuzes und damit aller hexagonalen Formen empfiehlt es sich, die Länge der Zwischenaxen als Einheit zu wählen, also die nach vorn gehende Zwischenaxe (im Querschnitt = 9 Quadratseiten) in demselben Punkte endigen zu lassen, wie im quadratischen System. Aus dieser Länge der Höhe des gleichseitigen Dreiecks berechnet sich die Seite $a = \frac{2h\sqrt{3}}{3} = 10{,}36\ldots$, also beinahe $10^2/_5$. Geht man von dem Endpunkt der einen Zwischenaxe (R in Fig. 30) $5^1/_5$ nach links und rechts, so findet man die Endpunkte der beiden schiefen Nebenaxen. Etwas weniger einfach ist die Aufsuchung der Endpunkte der Zwischenaxen. Bei $n = ^3/_2$ wie in Fig. 29 sind die Koordinaten $x = y = \frac{n}{n+1} = \frac{3}{5}$. Der Punkt R wird gefunden $\frac{3}{5} \cdot 10\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot 2^1/_5 = 7\frac{14}{25}$ Quadratseiten nach rechts und $\frac{3}{5}$ nach unten. Der Punkt R'' wird gefunden $\frac{3}{5} \cdot 10\frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot 8\frac{1}{5} = 11\frac{4}{25}$ nach rechts und $\frac{3}{5}$ nach oben. Der Punkt R' lässt sich einfach finden, da man die Richtung der Zwischenaxe kennt, welche die der Diagonale des von den beiden schiefen Nebenaxen gebildeten Parallelogramms ist, indem man von dieser $^3/_5$ nimmt, also $\frac{3}{5} \cdot 6 = 3^3/_5$, und demnach über die Ecke des dritten Quadrats links noch $^3/_5$ hinaus, oder was dasselbe ist, $3^3/_5$ vom Schnittpunkt der Axen aus nach links und $1^1/_5$ nach unten geht.

§ 33. Hexagonale Pyramiden erster Ordnung.

Aus der zwölfseitigen Doppelpyramide leitet man die übrigen Formen ab, indem man 1) $n = 1$ oder 2) $n = 2$ oder 3) $m = \infty$ setzt.

Fig. 30.

1) Wird $n = 1$, so fallen je zwei in einer sekundären Polkante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, z. B.:

$A_1 B_n C_m$ und $A_n B_1 C_m$ in $A_1 B_1 C_m$.

Hierdurch entsteht die primäre hexagonale Pyramide oder Pyramide erster Ordnung:

$$mP = a : na : \infty a : mc$$

(Fig. 30), begrenzt von 12 gleichschenkligen Dreiecken mit 6 Basiskanten, 12 primären Polkanten, 6 primären Basisecken und zwei Polecken.

Zu den primären Pyramiden gehört auch die Grundform P.

§ 34. Die hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung.

2) Wird $n = 2$, so wird auch $s = \frac{n}{n-1} = 2$, und es fallen je zwei in einer primären Polkante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, z. B. $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_s C_m$ in die Fläche $A_1 B_2 C_m$. Hierbei fallen die primären Basisecken und Polkanten weg, und es entsteht eine sekundäre Pyramide oder Pyramide zweiter Ordnung $mP2 = a : 2a : 2a : mc$ (Fig. 31), welche nur sekundäre Basisecken und Polkanten besitzt und sich im übrigen von einer Pyramide erster Ordnung nur durch die Stellung unterscheidet.

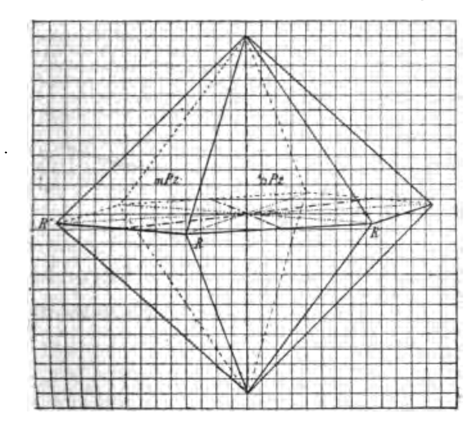


Fig. 31.

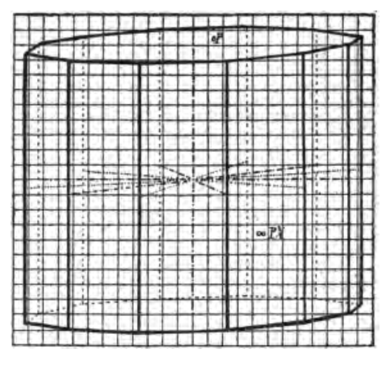


Fig. 32.

Die Basiskanten stehen auf den Nebenaxen senkrecht, die Basisecken bekommen die Koordinaten $x = y = \frac{2}{3}$ und sind sehr leicht aufzufinden. Die vordere R, indem man die Zwischenaxe bis zur vierten Linie verlängert, die anderen R', indem man von den Endpunkten der von links nach rechts gehenden Nebenaxen in der Richtung nach vorn und hinten $^2/_3$ der Einheit der Axen geht, also zwei Quadratseiten nach links und rechts und $^2/_3$ nach unten und oben. Diese leicht zu findenden Punkte benutzt man immer, wenn man nur die Richtung der Zwischenaxen sucht.

§ 35. Die hexagonalen Prismen.

3) Wird $m = \infty$, so fallen je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ in die Fläche $A_1 B_n C_\infty$ und die Pyramiden verwandeln sich in Prismen. Es giebt dreierlei Prismen: $\infty Pn = a : na : \frac{n}{n-1} a : \infty c$, die dihexagonale oder zwölfseitige Prismen (Fig. 32) mit 6 primären und 6 sekundären Seitenkanten, $\infty P = a : a : \infty a : \infty c$, das primäre Prisma

oder **Prisma erster Ordnung** (Fig. 33) mit 6 primären Seitenkanten, und $\infty P2 = a : 2a : 2a : \infty c$ das **sekundäre Prisma** oder **Prisma zweiter Ordnung** mit 6 sekundären Seitenkanten (Fig. 34).

Hierzu kommt dann noch das **basische Pinakoid** $0P = \infty a : \infty a : \infty a : c$ oder $a : a : a : 0c$.

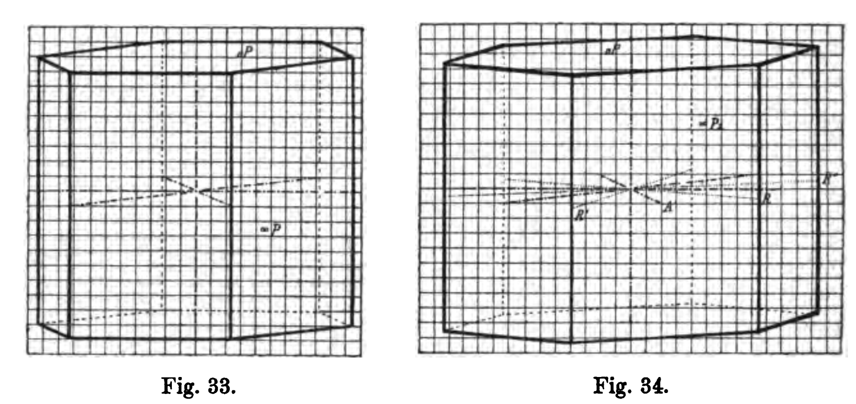
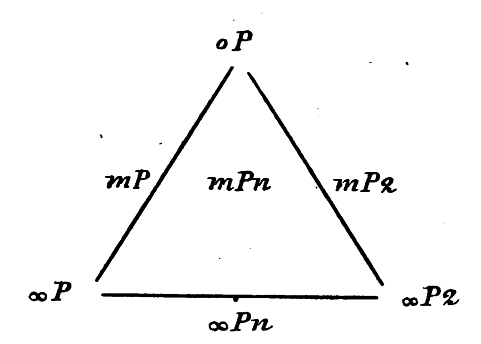


Fig. 33. Fig. 34.

§ 36. **Übersicht der hexagonalen Formen.** Das folgende Schema vereinigt die sieben Arten von Formen des hexagonalen Systems:



Der einzige Unterschied gegenüber der Bezeichnung der tetragonalen Formen besteht darin, dass bei den Pyramiden und Prismen zweiter Ordnung hier $n = 2$, dort $n = \infty$ ist.

VII. Kapitel.

Das reguläre System.

§ 37. Die Achtundvierzigflächner. Durch die neun Symmetrieebenen, welche sich bei den Krystallformen, denen man drei gleichwertige Axen, von denen jede auf den beiden anderen senkrecht steht, zu Grunde legen kann, ergeben, wird der Raum

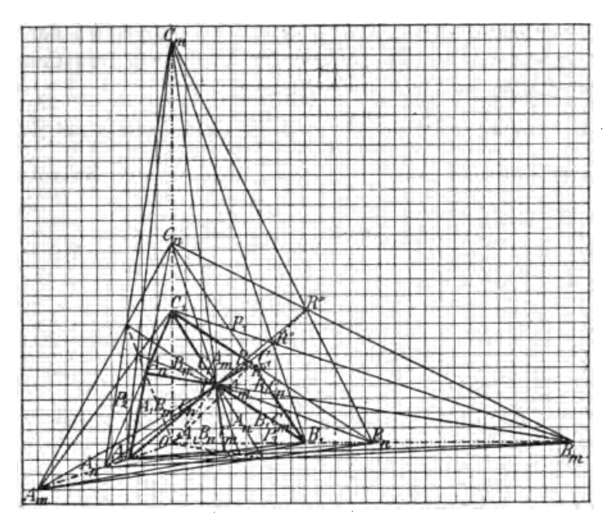


Fig. 35.

in 48 gleiche Teile geteilt. Eine Fläche, welche in einem solchen Raumteil erscheint, wird der Symmetrie entsprechend also im ganzen 48 mal auftreten, und zwar in jedem Oktanten sechsmal. Diesen allgemeinen Fall stellt eine Fläche dar mit dem Axenverhältnis $a : na : ma$. Die sechs Flächen in dem Oktanten vorn, rechts, oben heissen dann, wenn wir zur Bezeichnung der Richtungen die Buchstaben A, B und C wie im rhombischen System beibehalten, $A_1 B_n C_m$, $A_1 B_m C_n$, $A_n B_1 C_m$, $A_m B_1 C_n$, $A_n B_m C_1$ und $A_m B_n C_1$. In Fig. 35 sind diese sechs Flächen mit ihren Schnittlinien gezeichnet. Hierbei zeigen sich dreierlei Ecken, in denen die Kanten zusammenstossen.

Die Punkte auf den Hauptaxen werden **oktaedrische** Ecken genannt. In jeder der Axenebenen fällt in der Zeichnung eine Ecke auf die den Winkel der Hauptaxe halbierende Zwischenaxe, entsprechend den sekundären Basisecken im quadratischen System (und

wie diese mit den Koordinaten $x = y = \frac{n}{n+1}$, $z = 0$ oder wie bei R' mit $y = z = \frac{n}{n+1} = \frac{3/2}{3/2+1} = \frac{3}{5}$, $x = 0$).

Diese Ecken werden **rhombische** Ecken genannt, in jede Axenebene fallen 4 derselben, im ganzen giebt es also deren 12.

Endlich schneiden sich sämtliche Schnittlinien von je zwei Ebenen auf der durch die Mitte des Oktanten führenden sog. **trigonalen** Zwischenaxe in einer trigonalen oder **hexaedrischen** Ecke, deren es also im ganzen 8 giebt.

Die Koordinaten dieser Ecke, als des Schnittpunktes der Linien $A_l R'''$ und $A_m R'$ berechnet man aus der aus den reciproken Entfernungen der Endpunkte dieser Linien gebildeten Determinante.

Die Entfernung $OR' = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$ ist die des Quadrats mit der Seite $\frac{n}{n+1}$. R''' ist der Schnittpunkt von $B_n C_m$ und $B_m C_n$, dessen Koordinaten aus der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ berechnet, gleich $\dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}} = \dfrac{mn}{m+n}$ sind, also ist

$$OR''' = \frac{mn\sqrt{2}}{m+n}.$$

Die Determinante heisst also:

$\begin{vmatrix} 1 & \frac{m+n}{mn\sqrt{2}} \\ m & \frac{n+1}{n\sqrt{2}} \end{vmatrix}$, woraus sich für die Koordinate x nach der Formel $\dfrac{b_2 - b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ der Wert

$$\frac{\frac{n+1}{n\sqrt{2}} - \frac{m+n}{mn\sqrt{2}}}{\frac{n+1}{n\sqrt{2}} - \frac{m(m+n)}{mn\sqrt{2}}} = \frac{m(n+1) - (m+n)}{m(n+1) - m(m+n)} = \frac{mn}{mn+m+n} \text{ oder}$$

in anderer Form $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{m}}$ ergiebt.

Die Koordinaten y und z sind ebenso gross.

Fig. 36.

In Fig. 36 ist die vollständige von 48 ungleichseitigen Dreiecken begrenzte Form mit dem Axenverhältnis:

$$a : na : ma = a : {}^3/_2\, a : 3a,$$

für welche man abgekürzt das Zeichen

$$mOn = 3O\,{}^3/_2$$

schreibt, dargestellt. (O ist die Abkürzung für die Grundform des regulären Systems, das Oktaeder.)

Die hexaedrische Ecke T hat bei $m = 3$, $n = {}^3/_2$ die Koordinaten $x = y = z = \frac{1}{2}$, wird also gefunden $4^1/_2$ Quadratseiten nach oben, $4^1/_2$ nach rechts und $1^1/_2$ in der Richtung nach vorn, d. h. $1^1/_2$ nach links, $^1/_2$ nach unten. R' hat die Koordinaten $y = z = {}^3/_5$, also $\frac{3}{5} \cdot 9 = 5\frac{2}{5}$ nach oben, $5^2/_5$ nach rechts. Die Koordinaten aller übrigen Ecken werden durch Vertauschung der Vorzeichen erhalten.

Die Krystallform mOn, welche **Achtundvierzigflächner** (**Hexakisoktaeder**) heisst, hat dreierlei Kanten, 24 mittlere oder oktaedrische verbinden die oktaedrischen Ecken mit den rhombischen, 24 kürzere oder hexaedrische verbinden die rhombischen Ecken mit den hexaedrischen und 24 längere oder dodekaedrische Kanten verbinden die hexaedrischen Ecken mit den oktaedrischen. Die am häufigsten vorkommenden Achtundvierzigflächner sind $3O^3/_2$, $4O2$ und $5O^5/_3$.

Aus den Achtundvierzigflächnern, welche den allgemeinsten Fall darstellen, entstehen besondere Formen, wenn zwei oder mehr Flächen in eine Ebene fallen.

Hierbei sind folgende drei Hauptfälle zu unterscheiden: 1) $m = n$ 2) $n = 1$ 3) $m = \infty$.

§ 38. **Die Ikositetraeder.** Bei $m = n$ fallen je zwei in einer längeren (dodekaedrischen) Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, z. B. $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_m C_n$ in die Fläche $A_1 B_m C_m$ (vergl. Fig. 35). Hierbei fallen die längeren Kanten weg, und statt sechs ungleichseitigen Dreiecken erscheinen drei Deltoide (Vierecke mit zwei Paar gleichen Seiten). Diese neue Form mit dem Axenverhältnis:

$$a : ma : ma = mOm$$

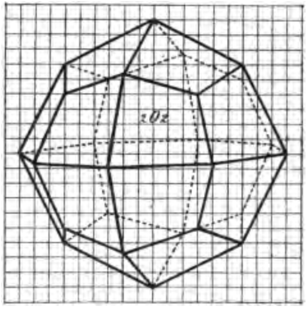


Fig. 37.

heisst **Ikositetraeder** (Vierundzwanzigflächner) Fig. 37, hat zweierlei Kanten, je 24 oktaedrische und hexaedrische und 26 Ecken (6 + 8 + 12).

Die Formel für die rhombischen Ecken wird $\frac{m}{m+1}$, die für die hexaedrischen Ecken $\frac{mm}{mm + m + m} = \frac{m}{m+2}$.

Die am häufigsten vorkommenden Ikositetraeder sind $2O2$ (Leucitoeder) und $3O3$ (Leucitoid).

§ 39. **Die Triakisoktaeder.** Bei $n = 1$ fallen je zwei in einer kürzeren (hexaedrischen) Kante zusammenstossende Flächen in

eine Ebene, z. B. $A_1 B_n C_m$ und $A_n B_1 C_m$ in $A_1 B_1 C_m$. Die hexaedrischen Kanten und rhombischen Ecken verschwinden, und je zwei oktaedrische Kanten bilden eine Gerade ($A_1 B_n$ und $A_n B_1 = A_1 B_1$), so dass nur 36 Kanten, 24 dodekaedrische und 12 oktaedrische, und 14 Ecken (6 achtflächige oktaedrische und 8 dreiflächige hexaedrische Ecken) bleiben. Diese neue, von 24 gleichschenkligen Dreiecken begrenzte Form mit dem Axenverhältnis $a : a : ma = mO$ heisst Triakisoktaeder oder Pyramidenoktaeder (Fig. 38).

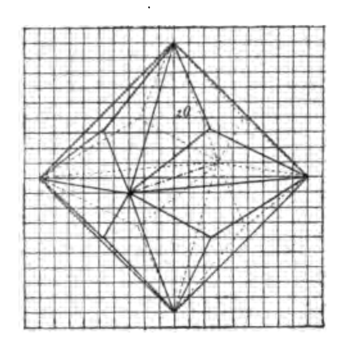


Fig. 38.

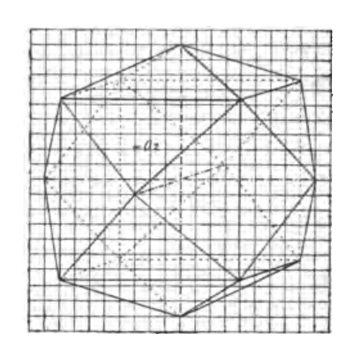


Fig. 39.

Die Formel für die hexaedrischen Ecken vereinfacht sich und wird $x = y = z = \frac{m}{2m+1}$. Die gewöhnlichsten Formen sind $^3/_2O$, $2O$ und $3O$.

§ 40. Die Tetrakishexaeder. Wird $m = \infty$, so fallen je zwei in einer mittleren oder oktaedrischen Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, z. B. $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ in die Fläche $A_1 B_n C_\infty$. Dabei fallen die oktaedrischen Kanten und die rhombischen Ecken weg, und je zwei hexaedrische Kanten in eine mit einer der 3 Axen parallele Gerade. Diese Form wird ebenfalls von 24 gleichschenkligen Dreiecken begrenzt, hat 36 Kanten (12 hexaedrische und 24 dodekaedrische) und 14 Ecken (6 vierflächige oktaedrische und 8 sechsflächige hexaedrische Ecken) und heisst Tetrakishexaeder oder Pyramidenwürfel $a : na : \infty a = \infty On$ (Fig. 39).

Die gewöhnlichsten Arten sind $\infty O^3/_2$, $\infty O2$ und $\infty O3$. Die hexaedrischen Ecken haben die Koordinaten $x = y = z = \frac{n}{n+1}$.

Treten zwei von den drei hier besprochenen Hauptfällen zugleich ein, so entstehen gleichfalls neue Formen.

§ 41. Das Rhombendodekaeder. $n = 1$, $m = \infty$. Je vier in einer rhombischen Ecke zusammenstossende Flächen fallen in eine Ebene, $A_1 B_n C_m$, $A_n B_1 C_m$, $A_n B_1 C_{-m}$ und $A_1 B_n C_{-m}$ in die



Fläche $A_1 B_1 C_\infty$, hierbei fallen ($n = 1$) alle hexaedrischen und ($m = \infty$) alle oktaedrischen Kanten weg, und es giebt eine von 12 Rhomben begrenzte Form mit 24 dodekaedrischen Kanten und 14 Ecken (6 vierflächige, oktaedrische und 8 dreiflächige, hexaedrische Ecken). Diese Form (Fig. 40) mit dem Axenverhältnis:

$$a : a : \infty a = \infty O$$

heisst Rhombendodekaeder (Zwölfflächner) und hat keine Varietäten. Die dodekaedrischen Kanten haben von dieser Form ihren Namen.

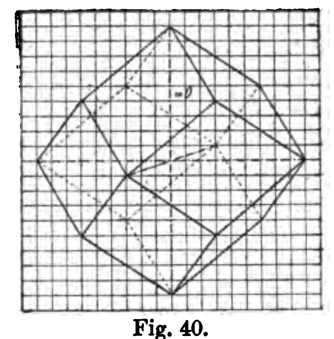


Fig. 40.

Die hexaedrischen Ecken bekommen die Koordinaten $x = y = z = \frac{1}{2}$.

§ 42. **Das Oktaeder.** $m = n = 1$. Sämtliche 6 Flächen, welche in einer hexaedrischen Ecke zusammenstossen und demselben Oktanten angehören, fallen in eine Ebene, $A_1 B_n C_m$, $A_1 B_m C_n$, $A_n B_m C_1$ u. s. w. in die Fläche $A_1 B_1 C_1$. Die hexaedrischen Kanten ($n = 1$) und dodekaedrischen Kanten ($m = n$) fallen weg, und nur die oktaedrischen Kanten, von denen je zwei in eine Gerade fallen, bleiben. Rhombische und trigonale Ecken verschwinden, und es entsteht die Grundform des regulären Systems, das Oktaeder (Fig. 41) $a : a : a = O$, von dem die oktaedrischen Ecken und Kanten ihre Bezeichnung haben. Die 8 Dreiecke sind gleichseitig.

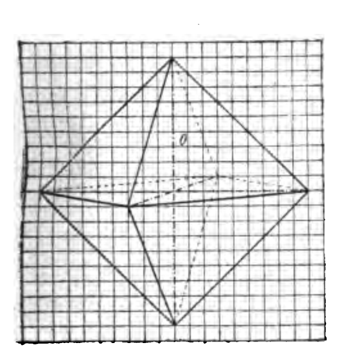


Fig. 41.

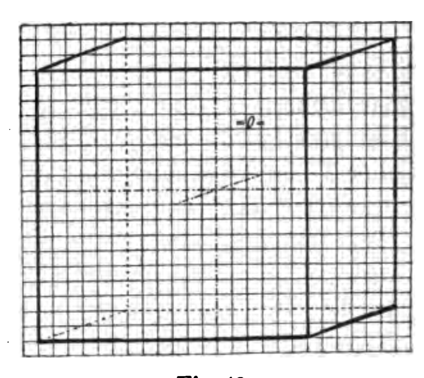


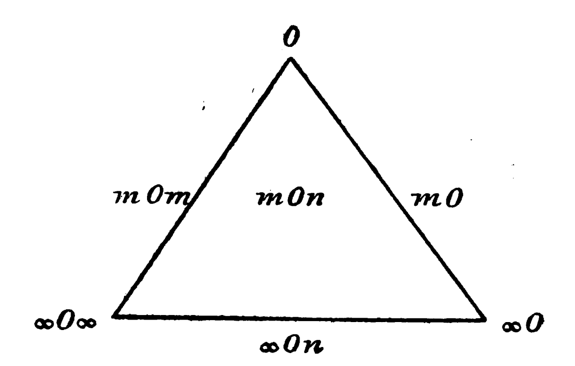
Fig. 42.

§ 43. **Das Hexaeder.** $m = n = \infty$. Sämtliche 8 Flächen, welche in einer oktaedrischen Ecke zusammenstossen, fallen in eine mit zwei Axen parallele Ebene, z. B. $A_1 B_\infty C_\infty$. Die Form gleicht dem Pinakoidalkörper des rhombischen Systems, hat keine oktaedrische

($m = \infty$) und keine dodekaedrische ($m = n$), sondern nur hexaedrische Kanten, von denen je zwei in eine Gerade fallen. Die von 6 Quadraten begrenzte Form heisst Würfel oder Hexaeder (Fig. 42) $a : \infty a : \infty a = \infty O \infty$.

Die hexaedrischen Ecken, die wie die hexaedrischen Kanten nach dieser Form benannt sind, haben die Koordinaten $x = y = z = 1$.

§ 44. Uebersicht der regulären Formen. Das folgende Schema vereinigt die 7 Formen des regulären Systems:



An den Seiten des Dreiecks stehen die 3 Arten von Vierundzwanzigflächner, von denen es verschiedene giebt. Die Deltoidikositetraeder nähern sich in der Form, wenn m klein wird, dem Oktaeder, wenn es gross wird, dem Würfel, die Pyramidenoktaeder stehen in ähnlicher Weise zwischen Oktaeder und Rhombendodekaeder. Man ziehe z. B. die längeren Diagonalen in den Rhomben.

Die Pyramiden, welche den Flächen des Oktaeders bei mO aufsitzen, werden um so flacher, je kleiner m wird, und ihre Spitze fällt in die Grundfläche, wenn $m = 1$ wird. Die Pyramidenwürfel stehen zwischen Würfel und Rhombendodekaeder. Die Spitze der den Würfelflächen aufsitzenden Pyramiden fällt in die Basis bei $n = \infty$. Das Rhombendodekaeder erweist sich als eine Art Pyramidenwürfel, wenn man die kürzeren Diagonalen der Rhomben zieht.

Jedem Vierundzwanzigflächner fehlt die Art von Kanten, welche nach der Form, welche an der gegenüberliegenden Ecke steht, benannt ist, also fehlen z. B. den Pyramidenwürfeln die oktaedrischen Kanten. An den Ecken stehen die Zeichen der drei Formen, welche einzig in ihrer Art sind.

VIII. Kapitel.

Die halbflächigen (hemiedrischen) Formen.

§ 45. Halbflächner. Im Gegensatz zu den vollflächigen (holoedrischen) Krystallformen, die von der Gesamtheit aller Flächen mit gleichem Axenverhältnis, die in gleichen Raumteilen liegen, begrenzt werden, zeigen sich bei gewissen Mineralien auch solche Formen, bei denen nur die Hälfte dieser Flächen erscheint. Von den durch die Symmetrieebenen gebildeten Raumteilen gehört nur die eine Hälfte zu einer Form, die andere Hälfte zu der unabhängig von dieser vorkommenden Gegenform. Dabei erscheinen an den Enden gleicher Symmetrieaxen stets gleich viel Flächen, welche mit einander und mit den Axen beiderseits gleiche Winkel einschliessen. In den Systemen, bei welchen mehr als drei Symmetrieebenen vorhanden sind, kann die Zerlegung der holoedrischen Formen in Halbflächner auf mehrfache Weise erfolgen, wobei unter Wegfall einer kleineren oder grösseren Zahl von Symmetrieebenen der Grad der Symmetrie mehr oder weniger verringert wird.

§ 46. Tetartoedrie. In denjenigen Systemen, in denen mehrere Arten von Hemiedrie möglich sind, kann ein Halbflächner nach der einen Art nochmals nach einem anderen Gesetz zerlegt werden, so dass Formen entstehen, welche nur den vierten Teil der holoedrischen Form zeigen. Man bezeichnet diese Erscheinung als Tetartoedrie.

§ 47. Hemimorphie. Während bei der Hemiedrie und Tetartoedrie die von geschlossenen Formen abgeleiteten Halbflächner und Viertelflächner ebenfalls geschlossene Formen sind, zeigt sich bei der Erscheinung, welche man Hemimorphie nennt, ein Zerfallen der holoedrischen, hemiedrischen und tetartoedrischen Formen in der Weise, dass die Flächen an dem einen Ende einer Symmetrieaxe alle bleiben, während die Flächen am anderen Ende dieser Axe sämtlich verschwinden. Die betreffende Symmetrieaxe wird auch Axe der Hemimorphie genannt.

Von den 32 verschiedenen Fällen der Holoedrie, Hemiedrie,

Tetartoedrie und Hemimorphie, welche möglich sind, wenngleich für einige derselben Beispiele in der Natur noch nicht gefunden sind, wollen im Folgenden nur die beschrieben werden, welche geschlossene Formen liefern.

§ 48. Die Hemiedrie des rhombischen Systems. Denkt man sich von den 8 Flächen einer rhombischen Pyramide, welche den allgemeinsten Fall einer rhombischen Form darstellt, die Hälfte so ausgewählt, dass an dem Ende jeder Axe statt vier Flächen nur zwei erscheinen, so ist jeder Oktant, in welchem eine Fläche bleibt, von drei Oktanten umgeben, in denen die Flächen wegfallen und umgekehrt. Da, wo eine Fläche wegfällt, treffen die drei anliegenden Flächen in einer neuen Ecke zusammen, welche einer Ecke des Pinakoidalkörpers entspricht. Es entsteht hierbei eine von vier ungleichseitigen Dreiecken begrenzte keilähnliche Form (Fig. 43), welche man deshalb ein rhombisches Sphenoid nennt, dieselbe hat vier Ecken (z. B. S mit den Koordinaten $x = -a$, $y = b$, $z = c$)

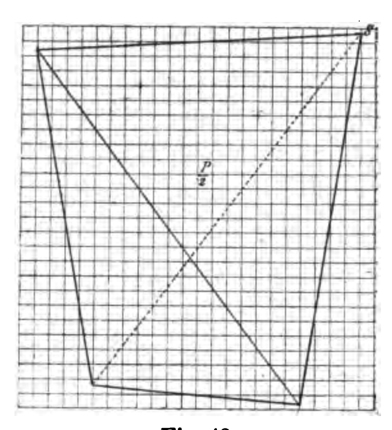


Fig. 43.

und sechs Kanten, welche in die Pinakoide fallen. Man bezeichnet diese Formen mit $+\frac{P}{2}$, $+\frac{mP}{2}$, $+\frac{m\breve{P}n}{2}$, $+\frac{m\bar{P}n}{2}$, wenn die Fläche in dem Oktanten vorn, oben rechts daran ist, die Gegenformen mit dem Vorzeichen —. Die Prismen, Domen und Pinakoide erleiden bei dieser Hemiedrie keine Veränderung, doch sind sowohl die Prismen, als die Domen hierbei als Arten von Sphenoiden anzusehen, bei denen m oder n den Grenzwert ∞ angenommen hat. Bei den Sphenoiden sind alle drei Symmetrieebenen weggefallen. Zu jeder Fläche fehlt

die parallele Gegenfläche. Man nennt deshalb auch die sphenoidische Hemiedrie eine geneigtflächige Hemiedrie.

§ 49. Die Hemiedrieen des tetragonalen Systems. Im tetragonalen System sind drei Arten von Hemiedrie möglich, wie man leicht an einer ditetragonalen Pyramide nachweisen kann. Von je vier in einer sekundären Basisecke zusammenstossenden Flächen lassen sich nämlich je zwei nur auf die drei in den Fig. 44, 45 und 46 dargestellten Arten auswählen. Entweder stossen je zwei Flächen in einer Basiskante, oder in einer sekundären Polkante oder in gar keiner Kante zusammen. Im ersten Fall bleibt nur die Haupt-

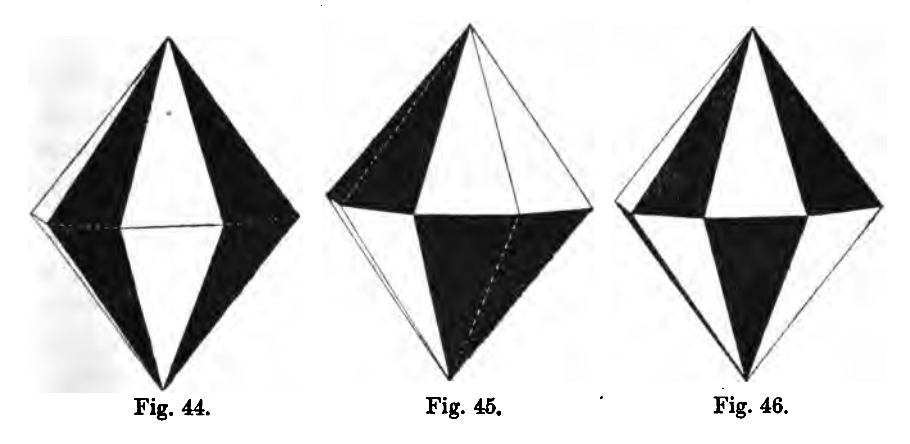


Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.

symmetrieebene als Symmetrieebene bestehen, im zweiten Fall bleiben die beiden sekundären Hauptschnitte Symmetrieebenen und im dritten Fall hört jede Symmetrie auf.

§ 50. Die pyramidale oder parallelflächige Hemiedrie. Wenn je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen einer ditetragonalen Pyramide wachsen oder verschwinden, so entstehen in den ausfallenden von je einem primären und einem sekundären Hauptschnitt begrenzten Raumviertel auf den Verlängerungen je zweier Basiskanten neue Ecken (vergl. Fig. 24), die man als Zwischenecken bezeichnen kann.

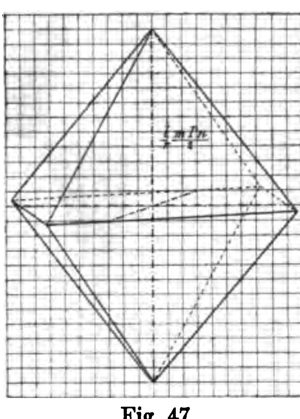
Es schneiden sich in einer solchen z. B. die Kanten $A_n B_{-1}$ und $A_1 B_n$. Aus der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & -1 \\ 1 & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ ergiebt sich $x = \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n^2}+1} = \frac{n^2+n}{n^2+1}$, $y = \frac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}+1} = -\frac{n^2-n}{n^2+1}$, also z. B. für $n = 2$ $x = \frac{6}{5}$ $y = -\frac{2}{5}$, woraus sich durch Ver-

tauschen von x und y und deren Vorzeichen die Koordinaten der übrigen Ecken ebenfalls ergeben.

Diese Punkte sind die Ecken eines Quadrats. Die Verbindung derselben mit den beiden Polecken liefert die Polkanten einer tetragonalen Pyramide dritter Ordnung oder einer Pyramide der Zwischenstellung, die sich von den Pyramiden erster und zweiter Ordnung nur durch diese Stellung unterscheidet und dadurch, dass die Nebenaxen weder durch die Ecken noch durch die Mitten der Basiskanten gehen.

Die von der Gesamtform abgeleiteten beiden Halbflächner kann man als $\frac{r}{l}\,\frac{mPn}{2}$ und $\frac{l}{r}\,\frac{mPn}{2}$ (Fig. 47) bezeichnen, je nachdem von den Flächen der einzelnen Oktanten oben die rechte oder die linke ausgebildet ist. Wird $m = \infty$, so fallen je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen in eine Ebene und es entsteht ein tetragonales Prisma der Zwischenstellung oder dritter Ordnung:

$$\frac{r}{l}\,\frac{\infty Pn}{2} \text{ und } \frac{l}{r}\,\frac{\infty Pn}{2},$$


Fig. 47.

dessen Kanten durch die Ecken der Pyramiden dritter Ordnung mit gleichem n gehen.

Wird $n = 1$, so wird $x = 1$ und $y = 0$, d. h. die Zwischenecke fällt mit der primären Basisecke zusammen, und die hemiedrische Form ist also mit der holoedrischen Pyramide erster Ordnung übereinstimmend. Das gleiche gilt für das Prisma erster Ordnung.

Wird $n = \infty$, so wird $x = \dfrac{\frac{1}{n}+1}{\frac{1}{n^2}+1} = 1$ und $y = \dfrac{\frac{1}{n}-1}{\frac{1}{n^2}+1} = -1$,

d. h. die Zwischenecke fällt mit der sekundären Basisecke der Pyramiden zweiter Ordnung zusammen, so dass auch diese Formen und das Prisma zweiter Ordnung bei dieser Art von Hemiedrie nicht verändert werden. Dasselbe gilt für die Basis, die man als Pyramide mit der Ableitungszahl $m = 0$ ansehen kann.

§ 51. **Die skalenoedrische (sphenoidische) oder geneigtflächige Hemiedrie.** Bei der zweiten Art von Hemiedrie wachsen oder verschwinden abwechselnd je zwei in einer sekundären Polkante

zusammenstossende Flächen der ditetragonalen Pyramide (Fig. 45). In dem Oktanten, in welchem die Flächen wegfallen, entsteht eine neue (sphenoidische) Ecke.

Diese sphenoidische Ecke ist der Schnittpunkt einer sekundären Polkante mit der Schnittlinie von den zwei den ausfallenden Flächen anliegenden Flächen ($A_1 B_{-n} C_{-m}$ und $A_{-n} B_1 C_{-m}$ Fig. 24), welche ebenfalls in den sekundären Hauptschnitt fällt und von einer Polecke (C_{-m}) nach einem Punkte auf der Zwischenaxe mit den Koordinaten $x = y = \frac{n}{n-1}$ führt. Die Koordinaten des Schnittpunktes, bezogen auf die C-Axe und die Zwischenaxe OR ergeben sich demnach aus der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{mc} & \frac{(n+1)}{n\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{mc} & \frac{(n-1)}{n\sqrt{2}} \end{vmatrix}$. Die Koordinate in der Richtung der C-Axe wird $z = -\frac{mc}{n}$, die in der Richtung der Zwischenaxe OR wird $= \sqrt{2}$, d. h. die Koordinaten x und y sind gleich 1. Die sphenoidischen Ecken (S) liegen also abwechselnd unter oder über den Basisecken der Pyramiden zweiter Ordnung im Abstand $\frac{mc}{n}$.

Verbindet man die vier sphenoidischen Ecken unter einander durch sog. Mittelkanten und mit den Polecken, so erhält man (Fig. 48) eine von acht ungleichseitigen Dreiecken begrenzte Form, bei der die Mittelkanten nicht in einer Ebene liegen, wie die Basiskanten der Pyramide, und die darnach den Namen Skalenoeder (von σκαληνός uneben) erhalten hat. Während die vier Mittelkanten gleich sind, ist dies bei den Polkanten nicht der Fall. In jeder Polecke stossen vier Kanten zusammen, von denen zwei den sekundären Polkanten der holoedrischen Form entsprechen und stumpfere heissen, weil die Flächen an ihnen stumpfere Winkel bilden, während die beiden anderen mit jenen abwechselnde schärfere Kanten bilden. In den vier sphenoidischen Ecken stossen je vier Kanten zusammen, von denen immer nur zwei, die Mittelkanten, gleich sind. Die Basisecken fallen ganz weg, beziehungsweise in die Mitte der Mittelkanten oder auf die stumpferen Polkanten. Aus jeder Gesamtform lassen sich zwei tetragonale Skalenoeder ableiten, die

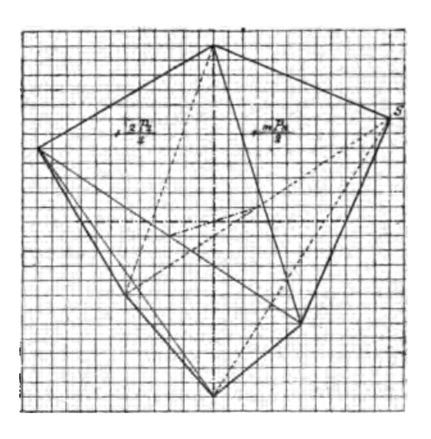


Fig. 48.

man als $+\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ unterscheidet, je nachdem die Flächen in dem Oktanten vorn, rechts, oben dabei ausgebildet sind oder fehlen. Die eine Form erscheint gegen die andere einfach um 90° um die Hauptaxe gedreht, sie enthält die zu den Flächen der Gegenform parallelen Flächen.

§ 52. Die tetragonalen Sphenoide. Wird $n = 1$, wie bei den Pyramiden erster Ordnung, so fallen je zwei in einer sekundären Polkante zusammenstossende Flächen des tetragonalen Skalenoeders in eine Ebene. Die sekundären Polkanten fallen weg, und je zwei der schärferen Polkanten fallen in eine Gerade, die durch die Hauptaxe halbiert wird. Polecken sind nicht da.

Die sphenoidischen Ecken bekommen die Koordinaten $x = y = \pm 1$, $z = \pm mc$.

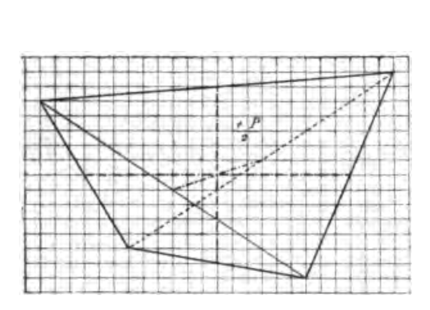


Fig. 49.

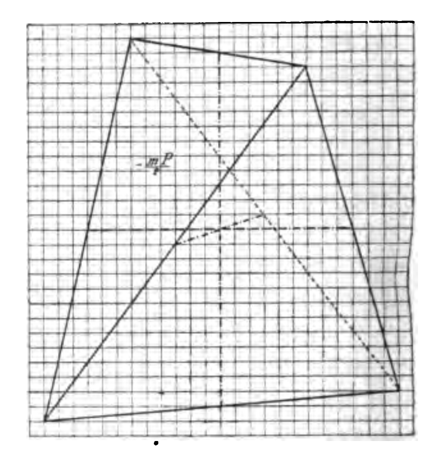


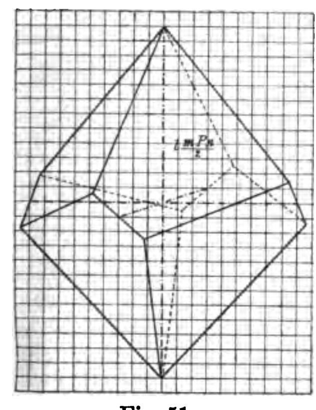
Fig. 50.

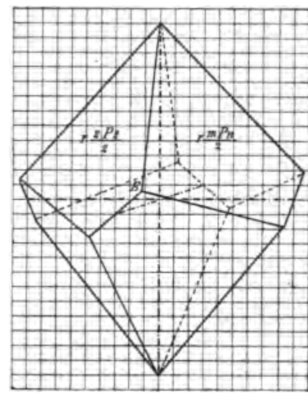
Hierbei entstehen von je vier gleichschenkligen Dreiecken begrenzte Sphenoide $\pm\frac{mP}{2}$; Fig. 49 zeigt ein solches, bei dem die Polkanten stumpfer sind als die Mittelkanten und welches deshalb ein stumpfes genannt wird. Fig. 49 stellt ein spitzes Sphenoid in der Stellung der Gegenform dar, es ist im Gegensatz zu dem ersteren ein von einer spitzen Pyramide abgeleiteter Halbflächner.

Die übrigen Formen des tetragonalen Systems erleiden bei dieser Art von Hemiedrie keinerlei Veränderung. Wird $m = \infty$, so wird $z = 0$, und die sphenoidische Ecke fällt mit der Basisecke der holoedrischen Pyramide zweiter Ordnung zusammen. Wird $m = \infty$, so fallen die sphenoidischen Ecken in das Unendliche, d. h. die Mittelkanten und die stumpferen Polkanten verwandeln sich in die zu der

C-Axe parallelen Seitenkanten der Prismen. Jede Prismenfläche, jede Fläche der Pyramiden zweiter Ordnung und der Basis gehört zwei oder vier Oktanten zugleich an, und fällt deshalb auch dann nicht fort, wenn die Flächen der einzelnen Oktanten wegfallen.

§ 53. Die trapezoedrische Hemiedrie. Wenn, wie in Fig. 46, die in einzelnen von den Symmetrieebenen gebildeten Raumsechzehntel fallenden Flächen abwechselnd wachsen oder verschwinden, derart, dass jede verschwindende Fläche von drei wachsenden umgeben ist, so bilden diese drei in dem betreffenden Raumteil eine neue Ecke, die in keine Symmetrieebene fällt. Es giebt acht solche (trapezoedrische) Ecken; verbindet man dieselben unter sich und mit den Polecken, so entstehen Formen, welche von acht Trapezoiden begrenzt


Fig. 51.


Fig. 52.

werden und deshalb Trapezoeder genannt werden. Man kann diese, Fig. 51 und 52, als rechte und linke $r\,\frac{mPn}{2}$ und $l\,\frac{mPn}{2}$ unterscheiden, je nachdem die Flächen auf der rechten oder der linken Seite der primären Polkanten (von der Basisecke aus gesehen) zur Ausbildung gelangen. (Anm.: In der Fig. 51 und 52 sind die Bezeichnungen verwechselt).

Die Trapezoeder haben acht gleiche Polkanten und acht auf- und absteigende Mittelkanten, von denen vier durch die primären Basisecken und vier durch die sekundären Basisecken der ditetragonalen Pyramide halbiert werden und deshalb als primäre und sekundäre Mittelkanten unterschieden werden können. Die primären Mittelkanten gehen bei den linken Trapezoedern von links unten nach rechts oben, die sekundären von links oben nach rechts unten, bei den rechten Trapezoedern ist es umgekehrt. Die beiden Trapezoeder

lassen sich daher auch durch Drehung nicht ineinander überführen und besitzen keine Symmetrieebene. Man nennt derartige hemiedrische Formen **enantiomorph.** Da bei allen übrigen tetragonalen Formen die einzelnen Flächen mehr als einem einzelnen Raumsechzentel angehören, so können sie auch bei dieser Art von Hemiedrie eine Veränderung nicht erfahren.

§ 54. Die Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen von gleicher Centraldistanz.

Da die in einer trapezoedrischen Ecke zusammenstossenden Kanten nicht in die Axenebenen fallen, und die Koordinaten dieser Ecken also auch nicht in der Weise, wie bei den übrigen bis hierher vorkommenden Ecken aus den Axenabschnitten zweier dieselben Axen schneidenden Geraden bestimmt werden können, so liegt es nahe eine allgemein giltige Lösung der Aufgabe, die Koordinaten des Schnittpunktes dreier sich schneidenden Ebenen zu bestimmen, zu suchen.

Nach § 4 gilt für die Koordinaten eines Punktes, der auf einer Ebene $A_1B_1C_1$ mit den Axenabschnitten OA_1, OB_1, OC_1 liegt, die Gleichung:

$$\frac{x}{OA_1} + \frac{y}{OB_1} + \frac{z}{OC_1} = 1.$$

Setzt man für die reciproken Werte der Axenabschnitte die Werte $\mathfrak{a}_1 = \frac{1}{OA_1}$ $\mathfrak{b}_1 = \frac{1}{OB_1}$ $\mathfrak{c}_1 = \frac{1}{OC_1}$, so heisst diese Gleichung:

$$\mathfrak{a}_1 x + \mathfrak{b}_1 y + \mathfrak{c}_1 z = 1.$$

Liegt der Punkt zugleich auf zwei anderen Ebenen $A_2B_2C_2$ und $A_3B_3C_3$, so gelten auch die Gleichungen:

$$\mathfrak{a}_2 x + \mathfrak{b}_2 y + \mathfrak{c}_2 z = 1$$

und

$$\mathfrak{a}_3 x + \mathfrak{b}_3 y + \mathfrak{c}_3 z = 1.$$

Die Auflösung dieser drei Gleichungen ergiebt die drei unbekannten Koordinaten:

$$x = \frac{\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1}$$

$$y = \frac{\mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_2}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1}$$

$$z = \frac{\mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3 + \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3 - \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_3 + \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{a}_3\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_1}$$

Der Nenner ist in allen drei Ausdrücken derselbe und enthält alle sechs möglichen Produkte aus drei Faktoren, von denen jeder aus einer anderen der drei Gleichungen und jeder der Koefficient einer anderen Unbekannten ist. Von diesen Produkten sind diejenigen positiv, bei denen die Indices in der richtigen Reihenfolge 12312 stehen, und die anderen negativ, also $+\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3$ und $-\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_3\mathfrak{c}_2$.

Man nennt einen solchen Ausdruck eine Determinante dritten Grades und schreibt sie (vergl. § 2):

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1 & \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{c}_1 \\ \mathfrak{a}_2 & \mathfrak{b}_2 & \mathfrak{c}_2 \\ \mathfrak{a}_3 & \mathfrak{b}_3 & \mathfrak{c}_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}_3$$

Den Zähler von x findet man, wenn man in dem Nenner alle Elemente der ersten Kolonne, also alle $\mathfrak{a}$ gleich 1 setzt, den Zähler von y und z, wenn man

dasselbe mit den Elementen der zweiten und dritten Kolonne thut. Dabei erscheinen in den Zählern je drei Differenzen von zwei Produkten, welche in dem Nenner mit demselben Faktor multipliciert vorkommen. Man nennt diese Differenzen die Subdeterminanten. So gehört z. B. zu dem Element a_1 die Subdeterminante $b_2 c_3 - b_3 c_2$

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Sigma \pm b_2 c_3 = \alpha_1$$

$$\text{zu } a_2 \text{ gehört } \begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \Sigma \pm b_3 c_1 = \alpha_2 \text{ u. s. w.}$$

Hiernach lassen sich die Ausdrücke wesentlich einfacher schreiben:

$$x = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2}{a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3}$$

$$y = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3}$$

$$z = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}{\Sigma \pm a_1 b_2 c_3}$$

Multipliciert man von den drei Gleichungen für die drei Ebenen die erste mit α_1, die zweite mit α_2 und die dritte mit α_3 und addiert dieselben, so heben sich alle Glieder mit y und z auf und man erhält nach Heraussetzen des Faktors x und Division durch seinen Koefficienten den obigen Wert für x, und auf ähnliche Weise die Werte für y und z.

§ 55. Die trapezoedrischen Ecken.

Als Beispiel für die Anwendung obiger Gleichungen möge die Berechnung der Koordinaten des Schnittpunktes der drei in einer trapezoedrischen Ecke (E in Fig. 52) zusammenstossenden Ebenen $A_1 B_{-n} C_m$, $A_n B_1 C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ dienen. Die Determinante der reciproken Axenabschnitte heisst dann:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{mc} \\ \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{mc} \\ 1 & \frac{1}{n} & -\frac{1}{mc} \end{vmatrix} = \overset{\alpha_1}{\left(-\frac{1}{mc} - \frac{1}{n \cdot mc}\right)} + \frac{1}{n}\overset{\alpha_2}{\left(\frac{1}{n \cdot mc} - \frac{1}{n \cdot mc}\right)} + 1\overset{\alpha_3}{\left(-\frac{1}{n \cdot mc} - \frac{1}{mc}\right)}$$

$= -\frac{2(n+1)}{n \cdot mc}$. Daraus ergiebt sich $x = 1$. (Um die Subdeterminanten β_1, β_2 und β_3 zu finden, schreibe man die erste Kolonne hinter die dritte und verfahre wie bei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$). $\beta_1 = \frac{1}{mc} + \frac{1}{n \cdot mc}$, $\beta_2 = -\frac{1}{mc} - \frac{1}{mc}$, $\beta_3 = \frac{1}{n \cdot mc} - \frac{1}{mc}$;

$$\text{daraus } y = \frac{\frac{-2(n-1)}{n \cdot mc}}{\frac{-2(n+1)}{n \cdot mc}} = \frac{n-1}{n+1}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{n^2} - 1, \ \gamma_2 = -\frac{1}{n} - \frac{1}{n}, \ \gamma_3 = 1 + \frac{1}{n^2};$$

$$\text{daraus } z = \frac{\frac{-2(n-1)}{n^2}}{\frac{-2(n+1)}{n \cdot mc}} = \frac{mc}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}.$$

In Fig. 52, wo $n = 3/2$ angenommen ist, wird demnach der Punkt E gefunden, wenn man vom vorderen Endpunkt der Axe ($x = 1$) $\frac{1}{5}$ der Axenlänge, also $\frac{9}{5}$ Quadratseiten nach rechts und $\frac{2}{15}$ der Länge $mc = 12$, also $1\,3/5$ Quadratseiten, nach oben geht.

Bei $n = 1$ wird y und $z = 0$ d. h. die trapezoedrische Ecke fällt mit der primären Basisecke zusammen. Bei $n = \infty$ wird $y = x = 1$ und $z = 0$, d. h. die Ecke fällt mit der sekundären Basisecke zusammen. Bei $mc = \infty$ wird $z = \infty$ d. h. die Kanten sind zu der C-Axe parallel (vergl. § 50).

Anm.: Eine vierte Art von Hemiedrie des tetragonalen Systems scheint möglich zu sein, bei der je zwei in einer primären Polkante zusammenstossende Flächen der ditetragonalen Pyramide wachsen oder verschwinden. Da man aber die Nebenaxen und Zwischenaxen in diesem System beliebig umtauschen kann, so ist diese Art von Hemiedrie mit der sphenoidischen übereinstimmend.

§ 56. **Die Hemiedrien des hexagonalen Systems.** Die Hemiedrien des hexagonalen Systems entsprechen vollkommen denen des tetragonalen Systems. Auch hier lassen sich von den vier in einer sekundären Basisecke zusammenstossenden Flächen der zwölfseitigen Doppelpyramide je zwei auf drei verschiedene Arten auswählen. Entweder stossen zwei Flächen in einer Basiskante, oder in einer sekundären Polkante oder nur in der Ecke zusammen. Im ersteren Fall erhält man die parallelflächige oder pyramidale, im zweiten Fall die skalenoedrische (rhomboedrische) und im dritten Fall die trapezoedrische Hemiedrie, dabei bleibt nur die Hauptsymmetrieebene als Symmetrieebene oder die drei sekundären Hauptschnitte bleiben Symmetrieebenen oder alle Symmetrie verschwindet.

§ 57. **Die pyramidale oder parallelflächige Hemiedrie.** Wenn je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen der dihexagonalen Pyramide wachsen, so entstehen in der Verlängerung dieser Kante neue Ecken (vergl. Fig. 28), die weder auf den Nebenaxen noch auf den Zwischenaxen liegen.

Eine solche Ecke ist z. B. der Schnittpunkt einer Linie $A_n B_1$ mit einer anderen $A_1 B_3$, hat also die aus der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 1 \\ 1 & \frac{n-1}{n} \end{vmatrix}$ zu berechnenden Koordinaten:

$$x = \pm \frac{\frac{n-1}{n} - 1}{\frac{n-1}{n^2} - 1} = \pm \frac{n}{n^2 - n + 1}, \quad y = \pm \frac{\frac{1}{n} - 1}{\frac{n-1}{n^2} - 1} = \pm \frac{n(n-1)}{n^2 - n + 1}$$

Für $n = 3/2$ ergiebt sich $x = \pm \frac{6}{7}$, $y = \pm \frac{3}{7}$. Der Punkt E in Fig. 53 hat $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{6}{7}$, und wird gefunden, wenn man in der Richtung der einen Axe $6/7$ und von da ab in der Richtung der anderen $3/7$ ihrer Länge geht. Wird

die Figur, wie es hier der Fall ist, in $^7/_6$ der Grösse der anderen Figuren gezeichnet, so vereinfacht sich die Zeichnung bedeutend, indem man von dem Endpunkt einer Axe aus die halbe Länge der anderen Axe abträgt. Die Kante schneidet dann natürlich auch die Nebenaxen in $^7/_6$ der einfachen Entfernung, also $\frac{7 \cdot 52}{6 \cdot 5} = 12^2/_{15}$.

Durch Verbindung der sechs Zwischenecken mit den Polecken erhält man eine Pyramide der Zwischenstellung oder eine Pyramide dritter Ordnung, welche sich von den hexagonalen Pyramiden erster und zweiter Ordnung nur durch die Stellung unterscheidet. Die aus einer Gesamtform abgeleiteten Halbflächner werden auch in diesem System als $\frac{l}{r}\frac{mPn}{2}$ und $\frac{r}{l}\frac{mPn}{2}$ unterschieden. Py-

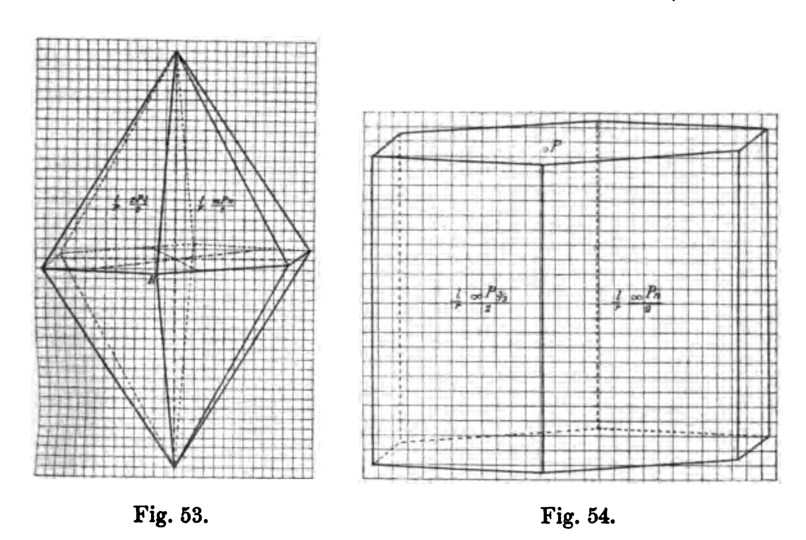


Fig. 53. Fig. 54.

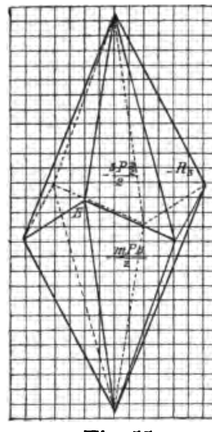
ramiden dritter Ordnung können für sich allein nie vorkommen, sondern würden in diesem Fall als Pyramiden erster oder zweiter Ordnung aufzufassen sein, da sie denselben Grad von Symmetrie besitzen, wie diese. Kommen sie aber mit anderen Formen zusammen vor, so verschwinden alle Symmetrieebenen mit Ausnahme der Hauptsymmetrieebene. Dasselbe gilt auch für die Pyramiden und Prismen dritter Ordnung im tetragonalen System.

Wird $m = \infty$, so fallen auch hier je zwei in einer Basiskante zusammenstossende Flächen in eine Ebene, und es entsteht ein Prisma dritter Ordnung oder ein Prisma der Zwischenstellung (Fig. 54 in $^7/_6$ der gewöhnlichen Grösse), $\frac{l}{r}\frac{\infty Pn}{2}$ und $\frac{r}{l}\frac{\infty Pn}{2}$.

Alle übrigen hexagonalen Formen bleiben bei dieser Art von Hemiedrie unverändert. Bei $n = 1$ wird $x = 1$ und $y = 0$, d. h. die Zwischenecke fällt mit einer primären Basisecke der Pyramiden erster Ordnung zusammen. Bei $n = 2$ wird $x = y = \frac{2}{3}$, d. h. die Zwischenecke fällt mit der sekundären Basisecke der Pyramiden zweiter Ordnung zusammen. Die Flächen aller Formen mit Ausnahme der dihexagonalen, gehören wenigstens zwei der durch die gewöhnlichen Symmetriebenen gebildeten Raumsechstel an und werden deshalb durch diese Hemiedrie nicht verändert.

§ 58. Die skalenoedrische oder rhomboedrische Hemiedrie. Wenn je zwei in einer sekundären Polkante zusammenstossende Flächen der dihexagonalen Pyramide wachsen oder verschwinden, so entstehen sechs neue (rhomboedrische) Ecken, in denen Flächen aus drei einem ausfallenden Dodekanten (Raumzwölftel) anliegenden Dodekanten zusammenstossen.

Die Koordinaten der in einen sekundären Hauptschnitt fallenden Ecke kann man in ähnlicher Weise, wie dies mit den entsprechenden Ecken im tetragonalen System geschah, berechnen, oder nach der in § 51 angegebenen Methode. Es treffen z. B. in E (Fig. 55) die Flächen $A_1 B_s C_m$, $A_s B_1 C_m$ $A_1 B_n C_{-m}$ und $A_n B_1 C_{-m}$ zusammen. Die für drei von diesen aus den reciproken Axenabschnitten gebildete Determinante würde etwa lauten:


Fig. 55.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{mc} \\ 1 & \frac{1}{n} & -\frac{1}{mc} \\ \frac{1}{n} & 1 & -\frac{1}{mc} \end{vmatrix} = \frac{3(n-1)}{n \cdot mc}$$

Für alle Punkte auf dem sekundären Hauptschnitt ist $x = y$. Da $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{2(n-1)}{n \cdot mc}$, so wird also $x = y = \frac{2}{3}$, d. h. die Ecke liegt wie im tetragonalen System über oder unter der sekundären Basisecke der Pyramiden zweiter Ordnung und zwar, da $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = \frac{(n-1)(2-n)}{n^2}$, im Abstand $\pm z = \frac{mc(2-n)}{3n}$

Verbindet man die sechs rhomboedrischen Ecken untereinander durch auf- und absteigende Mittelkanten und mit den Polecken durch sechs schärfere und sechs stumpfere Polkanten, so erhält man von zwölf ungleichseitigen Dreiecken begrenzte Skalenoeder, die man als $+\frac{mPn}{2}$ und $-\frac{mPn}{2}$ unterscheiden kann, von denen das eine gegen das andere um 180^0 verdreht erscheint.

Das in Fig. 55 gezeichnete Skalenoeder ist $-\frac{mPn}{2} = -\frac{3P^3/_2}{2}$ in dem halben Massstab $a:c = 5{,}2:4{,}5 = 1:0{,}86\bar{6}$. Die ganze Länge $mc = 13\,^1/_2$. Die rhomboedrischen Ecken liegen $1^1/_2$ über oder unter den sekundären Basisecken, von denen die vordere da liegt, wo die zweite Linie links von der nach vorn gehenden Zwischenaxe getroffen wird.

§ 59. **Die Rhomboeder.** Wird $n = 1$, so fallen je zwei in einer stumpferen Kante zusammenstossende Flächen der Skalenoeder in eine Ebene, und es entsteht als Halbflächner der Pyramiden erster Ordnung eine von sechs Rhomben begrenzte Form, die man Rhomboeder nennt (Fig. 56 und 57).

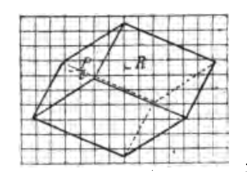


Fig. 56.

Die rhomboedrischen Ecken bekommen die Koordinaten $x = y = {}^2/_3$, $z = \pm\frac{mc}{3}$.

Die Rhomboeder heissen stumpf, wenn der von den Polkanten gebildete Winkel es ist, wie bei dem in Fig. 56 dargestellten Rhomboeder $-R = -\frac{P}{2}$, dagegen spitz, wenn die Polkanten einen spitzen Winkel einschliessen, Fig. 57 bei $3R = +\frac{mP}{2}$.

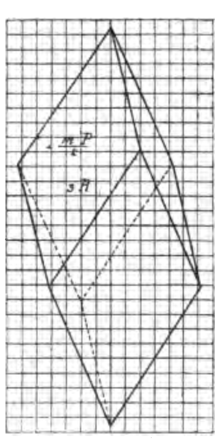


Fig. 57.

Beide Zeichnungen sind wie Fig. 55 in halbem Massstab und auf dieselben Axen bezogen (Kalkspat $a:c = 1:0{,}854$ hier $1:0{,}86\bar{6}$).

Zwei von derselben Pyramide als Gesamtform abgeleiteten Rhomboeder unterscheiden sich nur durch die Stellung, doch pflegt man dasjenige Rhomboeder als positiv zu bezeichnen, parallel zu dessen Flächen die vollkommenste Spaltbarkeit vorhanden ist.

Unter Spaltbarkeit versteht man die Eigenschaft krystallisierter Körper parallel zu gewissen Krystallflächen sich leichter teilen zu lassen. Senkrecht zu diesen Flächen ist die Kohäsion am geringsten. Im Gegensatz zu den in krystallographisch bestimmbarer Lage entstehenden ebenen Spaltungsflächen sind die Bruchflächen in unregelmässiger Lage und uneben.

Die hexagonalen Pyramiden zweiter Ordnung verändern sich bei der skalenoedrischen Hemiedrie nicht, weil jede Fläche zwei benachbarten Oktanten zugleich angehört.

Die rhomboedrische Ecke fällt mit der sekundären Basisecke der Pyramide zweiter Ordnung zusammen; für $n = 2$ wird die Koordinate

$$z = \frac{mc\,(2-n)}{3\,n} = 0.$$

Ebenso bleiben sämtliche prismatische Formen unverändert, weil jede Fläche derselben zwei in der Hauptsymmetrieebene an einander stossenden Dodekanten angehört.

§ 60. **Rhomboeder der Mittelkanten.** Das Rhomboeder, dessen rhomboedrische Ecken mit denen eines Skalenoeders zusammenfallen, und das deshalb auch die Mittelkanten mit diesem gemein hat, heisst das **Rhomboeder der Mittelkanten** dieses Skalenoeders.

Das letztere wird aus ihm abgeleitet, indem man die Hauptaxe verlängert (vgl. Fig. 58).

Ist $m_1 R$ das Rhomboeder der Mittelkanten von $\frac{mPn}{2}$, so besteht die Gleichung

$$z = \frac{m_1 c}{3} = \frac{mc\,(2-n)}{3\,n},$$

also $m_1 = \frac{m\,(2-n)}{n}$; folglich ist R das Rhomboeder der Mittelkanten von $\frac{3\,P\,{}^3/_2}{2}$, dessen Vertikalachse dreimal so gross ist. Man bezeichnet deshalb dieses Skalenoeder mit R_3. Ist die allgemeine Bezeichnung der Skalenoeder $m_1\,R_{n_1} = \frac{m\,P\,n}{2}$, wobei n_1 den Zahlenwert der Vervielfältigung der Hauptaxe bedeutet, also $n_1 = \frac{m}{m_1}$, so ergiebt sich aus der obigen Gleichung $n_1 = \frac{m}{m_1} = \frac{n}{2-n}$ der Wert für $n = \frac{2\,n_1}{n_1+1}$,

[also bei $R_3\,m = n_1\,m_1 = 3$ und $n = \frac{2\,n_1}{n_1+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.]

demnach bedeutet $\pm\, m_1\,R_{n_1}$ so viel als $\pm\frac{m_1 n_1\,P\frac{2\,n_1}{n_1+1}}{2}$

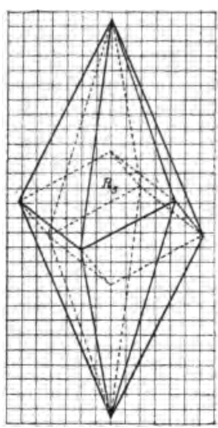


Fig. 58.

Die Formen der skalenoedrischen oder rhomboedrischen Hemiedrie, sowie die davon abgeleiteten tetartoedrischen und hemimorphen Formen werden in der neueren Zeit vielfach in ein besonderes Krystallsystem, das **rhomboedrische** oder **trigonale System**, zusammengefasst.

Während bei den eigentlichen hexagonalen Formen jede Fläche bei einer Drehung von 60° um die Hauptaxe mit einer gleichartigen Fläche zusammenfällt, also bei einer vollen Umdrehung von 360° sechsmal, weshalb diese Axe eine **sechszählige Symmetrieaxe***)

*) In diesem Sinne heisst Symmetrieaxe jede Linie, um welche sich ein Polyeder um einen von 360° abweichenden Winkel so drehen lässt, dass jede

genannt wird, ist dies bei den skalenoedrischen und rhomboedrischen und den davon abgeleiteten Formen erst bei einer Drehung von 120° der Fall, also dreimal bei einer vollen Umdrehung, und die Hauptaxe nur dreizählig (trigonal). Bei einer Umdrehung um 60° verwandelte sich ein Skalenoeder oder Rhomboeder in die Gegenform, die man auch als Spiegelbild in einem parallel zu dem basischen Hauptschnitt gehaltenen Spiegel erblickt. Durch Drehung um 60° und gleichzeitige Spiegelung nach der zur Axe senkrechten Ebene (Drehspiegelung) kommt hiernach eine Skalenoeder- oder Rhomboederfläche ebenfalls in die Lage einer gleichwertigen Fläche. Man nennt in diesem Fall die Axe eine (sechszählige) Axe der zusammengesetzten Symmetrie und die Ebene parallel der Basis, welche bei der skalenoedrischen Hemiedrie nicht mehr Symmetrieebene im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist, eine Ebene der zusammengesetzten Symmetrie.

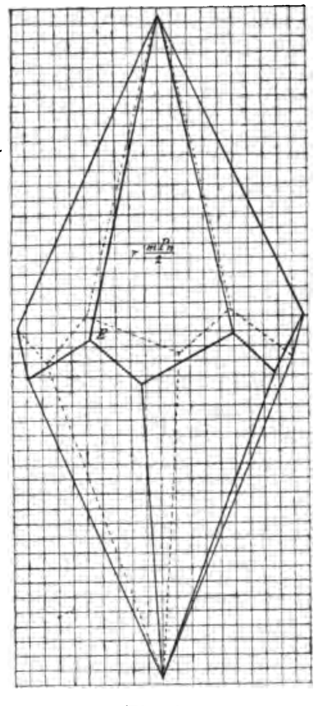


Fig. 59.

§ 61. **Die hexagonalen Trapezoeder.** Bei der trapezoedrischen Hemiedrie wachsen die einzelnen Flächen, welche einem Raumvierundzwanzigstel angehören, das von einem primären, einem sekundären und dem basischen Hauptschnitt begrenzt wird, während die anstossenden Flächen verschwinden und umgekehrt. An Stelle jeder verschwindenden Fläche der zwölfseitigen Doppelpyramide, der einzigen Form, welche bei dieser Art von Hemiedrie verändert wird, entsteht hierbei eine neue („trapezoedrische") Ecke.

Die an Stelle von $A_1\, B_n\, C_m$ tretende Ecke hat die Koordinaten $x = \frac{2}{n+1}$, $y = \frac{2(n-1)}{n+1}$, $z = \frac{mc(2-n)(n-1)}{n(n+1)}$.

Fläche desselben in die Lage einer anderen gleichwertigen Fläche gelangt. Je nachdem dies bei einer vollen Umdrehung zwei-, drei-, vier- oder sechsmal, also bei einem Winkel von resp. 180°, 120°, 90° oder 60° der Fall ist, heisst dann das Polyeder symmetrisch nach einer zwei-, drei-, vier- oder sechszähligen Symmetrieaxe.

Verbindet man die benachbarten trapezoedrischen Ecken unter einander und mit den zunächst gelegenen Polecken, so erhält man 12 Trapezoide, welche die darnach benannten **hexagonalen Trapezoeder** begrenzen. Von den 24 Kanten derselben sind 12 gleiche Polkanten und je 6 längere und kürzere trapezoedrische Mittelkanten, die abwechseln und entweder von den Nebenaxen oder den Zwischenaxen halbiert werden. Die Bezeichnung ist $r\frac{mPn}{2}$ und $l\frac{mPn}{2}$.

Die Zeichnung (Fig. 59) stellt $r\frac{3P^3/_2}{2}$ dar, dabei wird $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{2}{5}$, $z = \frac{mc}{15}$. Nimmt man, wie hier, den Massstab $= \frac{5}{6}$ der gewöhnlichen Grösse, so fällt der Endpunkt der nach vorn gehenden Zwischenaxe in den unteren Eckpunkt des dritten Quadrats links, wie bei der Pyramide erster Ordnung. Geht man von da $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6} = \frac{1}{3}$ der halben Axenlänge also $\frac{1}{3}\cdot 5^1/_5 = 1\frac{11}{15}$ nach links und rechts und von da $\frac{1}{15}\cdot\frac{5}{6}\cdot 27 = \frac{3}{2}$ nach oben und unten, so hat man die trapezoedrischen Eckpunkte. Die übrigen findet man in ähnlicher Weise, indem man auf den anderen Basiskanten der Pyramide erster Ordnung von der Mitte aus $^1/_6$ ihrer Länge nach beiden Seiten abträgt. Selbstverständlich ist auch die Axe c auf $\frac{5}{6}$ zu verkürzen, also bei $a : c = 10{,}4 : 9$ für $m = 3$, $mc = 27$ ist dieselbe $\frac{27 \cdot 5}{6} = 22^1/_2$. Die Figur soll nur eine in manchen Fällen praktische Vereinfachung beim Zeichnen erläutern, kann natürlich aber auch in jeder anderen Grösse gezeichnet werden. Die Wahl der Axeneinheit ist vollkommen willkürlich, wird aber doch immer so zu wählen sein, dass die Zeichnung, die ja doch nur die Anschauung vermitteln soll, möglichst leicht zu stand zu bringen ist.

Die beiden Trapezoeder lassen sich auch durch Drehung nicht in einander überführen und sind also „enantiomorph“.

Alle übrigen Formen bleiben bei dieser Art von Hemiedrie völlig unverändert, da bei allen die Flächen mehreren Raumvierundzwanzigstel zugleich angehören.

Dasselbe ergiebt sich aus einer Betrachtung der Formeln für die Koordinaten der trapezoedrischen Ecken; denn bei $n = 1$ wird $x = 1$, y und $z = 0$, bei $n = 2$ wird $x = y = \frac{2}{3}$, $z = 0$, d. h. die Ecken fallen mit den primären oder sekundären Basisecken zusammen. Bei $m = \infty$ wird auch $z = \infty$, und die Mittelkanten verwandeln sich in primäre und sekundäre Seitenkanten.

§ 62. **Die ditrigonale Hemiedrie.** Ausser den hier besprochenen drei Arten von Hemiedrien ist noch eine vierte Art möglich, von der jedoch Beispiele in der Natur bis jetzt noch nicht aufgefunden sind. Denkt man sich, dass an einer dihexagonalen Pyramide je vier an einer primären Basisecke zusammenstossende

Flächen wachsen, die an der folgenden gleichen Ecke verschwinden; in welchem Fall dann auch an dem einen Ende einer Nebenaxe die Flächen wachsen, während sie an dem entgegengesetzten Ende derselben verschwinden, so entsteht eine ditrigonale Pyramide, deren Querschnitt ein gleichseitiges Sechseck mit abwechselnd grösseren und kleineren Winkeln ist, dessen Eckpunkte auf den Nebenaxen einerseits in der einfachen Entfernung, andererseits in der $n$fachen Entfernung vom Mittelpunkt liegen. Die durch die Zwischenaxen gelegten Ebenen hören dabei auf Symmetrieebenen zu sein. Wird $n = 1$, so wird der Halbflächner gleich der holoedrichen Form $m P$, wird $n = 2$, so entsteht eine trigonale Pyramide, deren Querschnitt ein gleichseitiges Dreieck ist, dessen Eckpunkte auf die Nebenaxen und zwar in die Entfernung $2a$ vom Mittelpunkt fallen. Bei $m = \infty$ verwandeln sich die Pyramiden in ditrigonale und trigonale Prismen. Das Prisma erster Ordnung bleibt unverändert, ebenso die Basis. Formen von dieser Art von Hemiedrie würden wie die der skalenoedrischen Hemiedrie zum trigonalen System zu rechnen sein.

Der Fall, dass an einer sekundären Basisecke sämtliche Flächen wachsen resp. verschwinden, stimmt mit dem eben Besprochenen überein, da die Zwischenaxen bei einer Drehung um 30° zu Nebenaxen gemacht werden können. Die Bezeichnung aller übrigen Formen müsste alsdann entsprechend geändert werden.

§ 63. Die Hemiedrien des regulären Systems. Auch im regulären System sind drei Arten von Hemiedrie möglich.

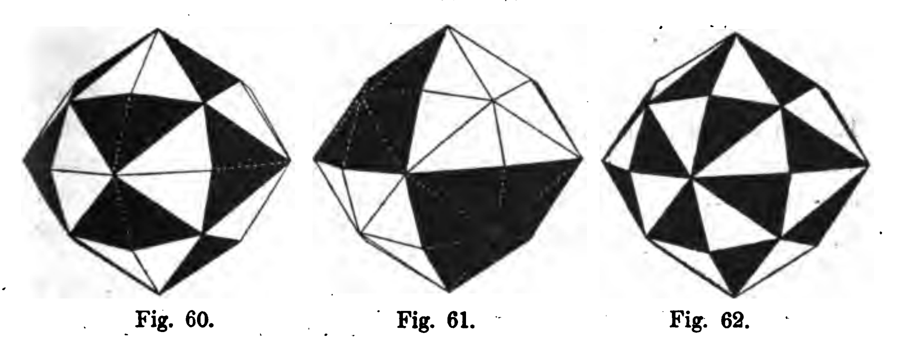


Fig. 60. Fig. 61. Fig. 62.

Von den 48 durch die Symmetrieebenen gebildeten Raumteilen lässt sich eine Hälfte so auswählen, dass je zwei in einer Hauptsymmetrieebene (Fig. 60), oder je zwei in einer gewöhnlichen Symmetrieebene zusammenstossende Raumteile (Fig. 61) zu derselben Form gehören, oder auch so, dass alle nicht einander anliegende

Raumteile (Fig. 62) zu derselben Form gehören. Im ersteren Fall bleiben die Hauptschnitte Symmetrieebenen, im zweiten Fall bleiben die gewöhnlichen Symmetrieebenen als solche bestehen, und im dritten Fall fallen alle Symmetrieebenen weg. Die erstere Art liefert parallelflächige Formen und entspricht der pyramidalen Hemiedrie, bei der zweiten wachsen oder verschwinden alle Flächen, welche demselben Oktanten angehören, und es entstehen geneigtflächige Formen, wie bei der skalenoedrischen oder sphenoidischen Hemiedrie, und die dritte Art liefert enantiomorphe Formen, wie die trapezoedrische Hemiedrie des tetragonalen und hexagonalen Systems.

§ 64. Die pentagonale (parallelflächige) Hemiedrie. Die Dyakisdodekaeder. Wenn von den Flächen der Achtundvierzigflächner, die den allgemeinsten Fall im regulären System darstellen, je zwei in einer Hauptsymmetrieebene, also in einer oktaedrischen Kante, zusammenstossende Flächen wachsen oder verschwinden, so entstehen in der Verlängerung dieser Kanten neue „pentagonale" Ecken P (Fig. 63) (vgl. P_1, P_2, P_3 in Fig. 35), in denen je 4 Flächen zusammentreffen, z. B. $A_1\ B_n\ C_m$, $A_1\ B_n\ C_{-m}$, $A_m\ B_1\ C_n$ und $A_m\ B_1\ C_{-n}$.

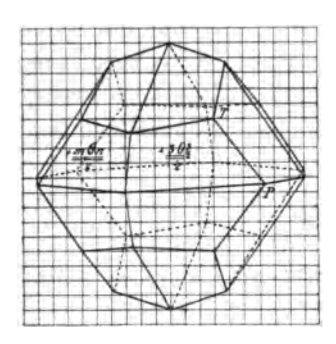


Fig. 63.

Die Kanten $A_1\ B_n$ und $A_m\ B_1$ schneiden sich in dem Punkt mit den Koordinaten $x = \frac{m\,(n-1)}{mn-1}$, $y = \frac{n\,(m-1)}{mn-1}$.

In jeder Axenebene liegen vier derartige Punkte, im ganzen 12, die an Stelle der rhombischen Ecken, welche wegfallen, treten. Verbindet man diese Punkte mit den Endpunkten der Hauptaxe und den trigonalen Ecken, so entstehen 24 Trapezoide, welche die Dyakisdodekaeder (Zweimalzwölfflächner), auch Diploeder genannte Formen begrenzen.

Man bezeichnet dieselben mit $+\left[\frac{m\,O\,n}{2}\right]$ und $-\left[\frac{m\,O\,n}{2}\right]$ oder auch $\pm\frac{m\,O\,n}{2} = \frac{1}{2}\,(a : na : ma)$.

Die Dyakisdodekaeder haben dreierlei Kanten, 12 längere, 12 kürzere und 24 mittlere „pentagonale" Kanten. Das Dyakisdodekaeder in der Stellung wie Fig. 63 wird auch als das linke, die Gegenform als das rechte bezeichnet; bei dem ersteren ist von den beiden

oberen Flächen im vorderen, rechten, oberen Oktant des Achtundvierzigflächners die linke, bei dem letzteren die rechte Fläche zur Ausbildung gelangt. Bei gewissen Dyakisdodekaedern verwandeln sich die Trapezoide in Trapeze.

In diesem Fall müssen die pentagonale Ecke und die hexaedrische Ecke, welche auf der zur längeren pentagonalen Kante parallelen Linie liegen, gleichen Abstand von der Axenebene haben, d. h. es muss $x = \frac{m(n-1)}{mn-1} = \frac{mn}{mn+m+n}$ werden, d. h. $m = n^2$ sein, wie z. B. bei $\frac{4\,O\,2}{2}$.

§ 65. **Die Pentagondodekaeder.** Bei $m = n$ wird $x = y = \frac{n(n-1)}{n^2-1} = \frac{n}{n+1}$, d. h. die pentagonale Ecke fällt mit der rhombischen zusammen. Deshalb ist $m\,O\,m$ und $\frac{m\,O\,m}{2}$ und $\infty\,O\,\infty$ und $\frac{\infty\,O\,\infty}{2}$ dieselbe Form. Wird $n = 1$, so ist $x = 0$, $y = 1$; d. h. die Ecke fällt mit der oktaedrischen Ecke zusammen bei $\infty\,O$, $m\,O$ und O. Demnach bleiben nur noch die Halbflächner der Pyramidenwürfel $\infty\,O\,n$. Da bei $m = \infty$ je zwei in einer oktaedrischen Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen, so entsteht ein Zwölfflächner, bei dem die längeren pentagonalen Kanten fehlen. Je zwei kürzere Kanten, z. B. $A_1\,C_m$ und $A_1\,C_{-m}$ fallen in eine Gerade. Statt der Trapezoide entstehen symmetrische Fünfecke (Pentagone). Darnach heissen diese Halbflächner **Pentagondodekaeder** (Fig. 64). Ihre Bezeichnung ist

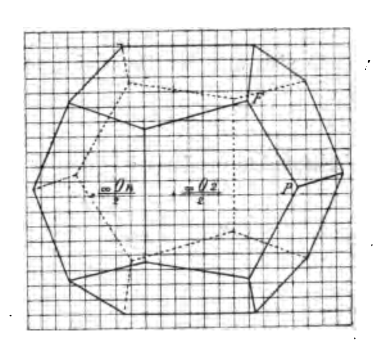


Fig. 64.

$+\frac{\infty\,O\,n}{2}$ und $-\frac{\infty\,O\,n}{2}$. Welches von den Dyakisdodekaedern oder Pentagondodekaedern als positiv bezeichnet wird, ist an und für sich willkürlich, doch ist einmal die Stellung für das eine bestimmt, so ist sie auch für alle übrigen gegeben. Die positiven Formen erscheinen gegen die negativen um 90° verdreht. Das Pentagondodekaeder in der Stellung wie Fig. 64 wird auch als ein linkes, die Gegenform als ein rechtes Pentagondodekaeder bezeichnet. Eine genauere Bezeichnung wie etwa $+\left[\frac{\infty\,O\,n}{2}\right]$ oder $-\frac{\infty\,O\,n}{2}$ ist überflüssig, da es nur eine Art von Halbflächner von $\infty\,O\,n$ giebt.

Die pentagonale Ecke P in Fig. 64 hat die Koordinaten $x = \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}$ $y = 1$, $z = 0$.

§ 66. Die tetraedrische (geneigtflächige) Hemiedrie. Die Hexakistetraeder. Wenn bei einem Achtundvierzigflächner die Hälfte der Flächen derart ausgewählt wird, dass jede Fläche mit der ihr in einer gewöhnlichen Symmetrieebene anliegenden Fläche zugleich wächst oder verschwindet, so wachsen oder verschwinden zugleich alle Flächen, welche demselben Oktanten angehören. In dem Oktanten, in dem das letztere der Fall ist, entsteht alsdann eine neue sechsflächige „tetraedrische" Ecke, in der aus den drei anliegenden Oktanten je zwei Flächen zusammentreffen.

Die Ecke fällt auf die trigonale Zwischenaxe und ist z. B. der Schnittpunkt der verlängerten hexaedrischen Kante, in der $A_1 B_n C_m$ und $A_n B_1 C_m$ zusammenstossen, und der Schnittlinie von den am Punkt C_{-1} liegenden Flächen $A_n B_{-m} C_{-1}$ und $A_{-m} B_n C_{-1}$. Erstere Linie schneidet also die Vertikalaxe in der Entfernung m und die Zwischenaxe in der Entfernung $\frac{n\sqrt{2}}{n+1}$, die letztere die C-Axe in der Entfernung -1 und die Zwischenaxe in der Entfernung $\frac{mn\sqrt{2}}{m-n}$ welche sich aus der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & -\frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & \frac{1}{n} \end{vmatrix}$ ergiebt. Die Koordinaten der Schnittpunkte werden mit Hilfe der Determinante $\begin{vmatrix} \frac{1}{m} & \frac{n+1}{n\sqrt{2}} \\ -1 & \frac{m-n}{mn\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ gefunden, es ist $x = \frac{-mn}{mn+m-n} = \frac{-1}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$. Die Koordinaten der tetraedrischen Ecke sind alle drei gleich diesem Wert. Das Vorzeichen ist immer entsprechend zu ändern.

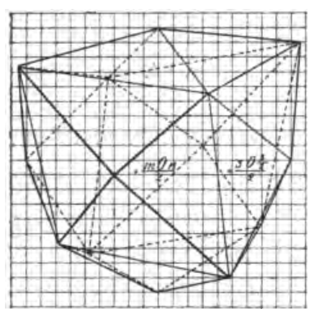


Fig. 65.

Verbindet man die vier tetraedrischen Ecken unter sich und mit den benachbarten oktaedrischen Ecken, so erhält man 24 ungleichseitige Dreiecke, welche ein Hexakistetraeder (Sechsmalvierflächner (Fig. 65) $+\frac{m\,O\,n}{2}$ und $-\frac{m\,O\,n}{2} = \frac{1}{2}\,(a : na : ma)$ umschliessen. Von den 36 Kanten sind 12 kürzere gleich den längeren dodekaedrischen Kanten der Gesamtform, 12 längere sind verlängerte hexaedrische Kanten und 12 mittlere tetraedrische Kanten verbinden die

tetraedrischen Ecken mit den oktaedrischen. Die Anzahl der Ecken ist 14 (4 sechsflächige hexaedrische, 4 sechsflächige tetraedrische und 6 vierflächige oktaedrische). Die beiden von derselben Gesamtform abgeleiteten Halbflächner unterscheiden sich nur durch ihre Stellung. In den Oktanten, in denen bei $+\frac{mOn}{2}$ hexaedrische Ecken sind, liegen bei $-\frac{mOn}{2}$ tetraedrische und umgekehrt.

§ 67. **Die Trigondodekaeder oder Pyramidentetraeder.** Da bei $m = n$ je zwei in einer dodekaedrischen Kante zusammenstossende Flächen in eine Ebene fallen (§ 35), so fallen diese Kanten weg, je zwei tetraedrische Kanten fallen in eine Gerade nnter Wegfall der oktaedrischen Ecken, und es entsteht als Halbflächner der Ikositetraeder, ein von 12 gleichschenkligen Dreiecken (Trigone) begrenztes Trigondodekaeder, auch Pyramidentetraeder genannt (Fig. 66), $+\frac{mOm}{2}$ und $-\frac{mOm}{2}$.

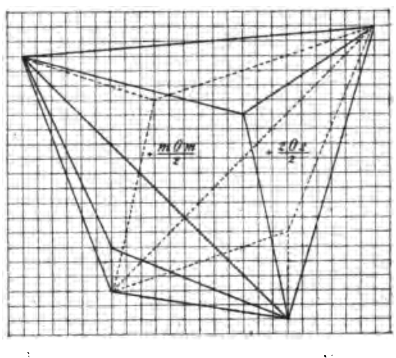


Fig. 66.

Von den 8 Ecken sind vier dreiflächige, hexaedrische die der Gesamtform.

Die vier sechsflächigen tetraedrischen Ecken haben wie die des Würfels die Koordinaten $x = y = z = \frac{m^2}{m^2 + m - m} = 1$.

§ 68. **Die Deltoiddodekaeder.** Da bei $n = 1$ die in einer hexaedrischen Kante zusammenstossenden Flächen in eine Ebene fallen (§ 36), so fallen diese Kanten weg, und es tritt an Stelle von je zwei ungleichseitigen Dreiecken der Hexakistetraeder ein Deltoid. Die von 12 Deltoiden begrenzten Formen heissen darnach Deltoiddodekaeder $\pm\frac{mO}{2}$, Fig. 67, sie sind die Halbflächner der Triakisoktaeder. Von den 14 Ecken sind 4 dreiflächige hexaedrische, 4 dreiflächige tetraedrische $\left(x = y = z = \frac{m}{2m - 1}\right)$

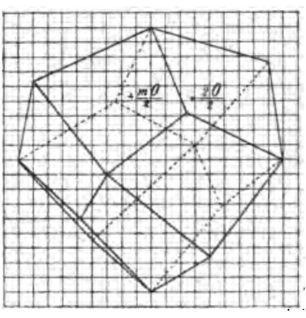


Fig. 67.

und 6 vierflächige oktaedrische. Von den Kanten sind 12 dodekaedrische und 12 tetraedrische.

§ 69. Das Tetraeder. Da bei $m = \infty$ stets zwei oder mehr in anliegenden Oktanten liegende Flächen in eine Ebene fallen, so werden diese Formen durch die tetraedrische Hemiedrie nicht verändert derart, dass $\infty O n$, ∞O, $\infty O \infty$ sowohl holoedrische, als hemiedrische Formen sein können. Es bleibt daher nur noch der Halbflächner des Oktaeders $\pm \frac{O}{2}$, das Tetraeder oder der Vierflächner, Fig. 68, begrenzt von 4 gleichseitigen Dreiecken, sonst ähnlich den Sphenoiden. Die 4 „tetraedrischen" Ecken liegen wie die abwechselnden Ecken des Würfels, die 6 „tetraedrischen" Kanten entsprechen den Diagonalen der Würfelflächen. Das Tetraeder ist die einzige hemiedrische Form, von der es keine verschiedene Arten giebt.

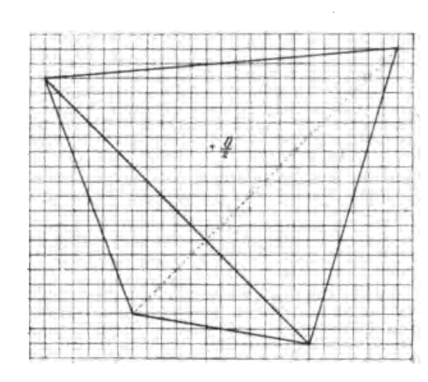


Fig. 68.

§ 70. Die plagiedrische Hemiedrie. Werden von den 48 Raumteilen, welche durch die 9 Symmetrieebenen der regulären

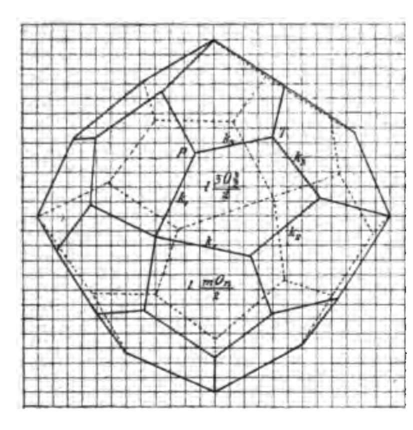


Fig. 69.

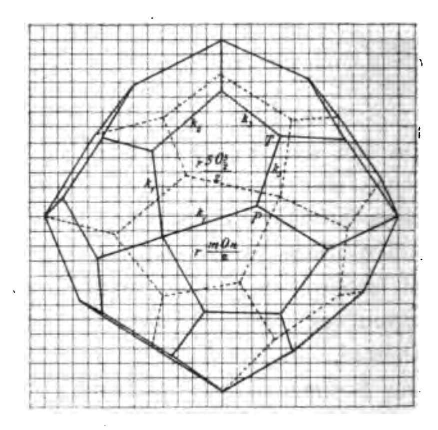


Fig. 70.

Formen gebildet werden, je 24 so ausgewählt, dass keiner dem anderen anliegt, so entstehen aus jedem Achtundvierzigflächner, der

einzigen Form, welche bei dieser Art von Hemiedrie eine Veränderung erfährt, zwei Plagieder oder Gyroeder Vierundzwanzigflächner, welche von Fünfecken begrenzt werden, Fig. 69 und 70). An Stelle jeder ausfallenden Fläche entsteht eine neue „plagiedrische“ Ecke, die hexaedrischen und oktaedrischen Ecken bleiben unverändert, die rhombischen Ecken fallen weg. Von den drei verschiedenen Arten von Kanten verbinden 24 die plagiedrischen Ecken mit oktaedrischen (k_1), 12 die plagiedrischen Ecken unter sich (k_2) und 24 die plagiedrischen Ecken mit den hexaedrischen (k_3). Von der zweiten Art ist an jedem Fünfeck nur je eine vorhanden, durch deren Mitte die rhombische Zwischenaxe geht. Vergleicht man die beiden von derselben Gesamtform abgeleiteten Halbflächner, so sieht man, dass bei dem einen (Fig. 69) die Kanten k_1 k_2 k_3 sich bei jeder Fläche folgen, wenn man nach links geht, während bei dem anderen die Kanten in derselben Reihenfolge erscheinen, wenn man nach rechts, also im Sinne des Uhrzeigers geht. Die erstere Form nennt man das linke Plagieder $l\,\frac{m\,O\,n}{2}$, die letztere das rechte $r\,\frac{m\,O\,n}{2}$. Die beiden Formen sind enantiomorph, wie die Trapezoeder. Bei dem ersteren sind in den positiven Oktanten die Flächen dieselben wie bei dem linken Dyakisdodekaeder, bei dem letzteren dieselben wie bei dem rechten.

Die Koordinaten der plagiedrischen Ecke berechnet man mit Hilfe der aus den reciproken Ableitungszahlen dreier einander nicht anliegenden Flächen, z. B. $A_n B_1 C_m$, $A_1 B_m C_n$, $A_1 B_n C_{-m}$ gebildeten Determinante; für $3\,O\,{}^3/_2$ erhält man aus

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{m} \\ 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} & -\frac{1}{m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}$$

$x = {}^3/_4$, $y = {}^9/_{20}$, $z = {}^3/_{20}$. Die Figuren 69 und 70 sind in ${}^4/_3$ der gewöhnlichen Grösse gezeichnet, dann wird $x = 1$, $y = \frac{3}{5}$, $z = \frac{1}{5}$.

Alle übrigen Formen des regulären Systems erleiden bei der plagiedrischen Hemiedrie keine Veränderung, weil jede Fläche derselben mehr als einem Raumachtundvierzigstel angehört.

IX. Kapitel.

Die viertelflächigen (tetartoedrischen) Formen.

§ 71. Die tetartoedrischen Formen des tetragonalen Systems. Da die Tetartoedrie (§ 46) nur da vorkommen kann, wo mindestens zwei verschiedene Arten von Hemiedrie möglich sind, so sind im triklinen, monoklinen und rhombischen System tetartoedrische Formen überhaupt ausgeschlossen. Im tetragonalen System wären bei den drei möglichen Arten der Hemiedrie bei gleichzeitiger Anwendung von je zwei derselben auch drei Arten von Tetartoedrie denkbar. Von diesen fallen jedoch zwei Arten weg, weil sie der für alle hemiedrische Formen geltenden Bedingung nicht genügen, wonach an den Enden gleicher Axen stets gleichviel Flächen erscheinen, welche mit einander und mit den Axen beiderseits gleiche Winkel einschliessen (§ 45). Bezeichnet man die 16 Flächen der ditetragonalen Pyramide oben und unten mit den Zahlen 1 bis 8, so würde

1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7 8

die holoedrische Form bezeichnen. Bei der sphenoidischen Hemiedrie zerfällt dieselbe in

1 2 . . 5 6 . .   und   . . 3 4 . . 7 8
. . 3 4 . . 7 8   1 2 . . 5 6 . .

bei der pyramidalen Hemiedrie in

1 . 3 . 5 . 7 .   und   . 2 . 4 . 6 . 8
1 . 3 . 5 . 7 .   . 2 . 4 . 6 . 8

und bei der trapezoedrischen Hemiedrie in

1 . 3 . 5 . 7 .   und   . 2 . 4 . 6 . 8
. 2 . 4 . 6 . 7   1 . 3 . 5 . 7 .

Werden nun zwei Arten von Hemiedrie gleichzeitig angewandt, so fallen alle Flächen weg, an deren Stelle bei der einen oder anderen Hemiedrie Punkte statt Zahlen stehen. Bei Anwendung der pyramidalen und der trapezoedrischen Hemiedrie bleiben dann entweder vier Flächen der oberen oder vier Flächen der unteren Hälfte der holoedrischen Form übrig. Es würden also an dem einen Ende der Hauptaxe vier Flächen der Pyramide III. Ordnung oder eines Tra-

pezoeders erscheinen, während an dem anderen Ende dieser Axe die entsprechenden Flächen ganz fehlten. Es wäre dies aber keine Tetartoedrie, sondern **Hemimorphie** einer hemiedrischen Form (vgl. § 47).

Bei Anwendung der sphenoidischen und trapezoedrischen Hemiedrie bleiben die Flächen

1 . . . 5 . . .　　. 2 . . . 6 . .
　　　　　oder
. . . 4 . . . 8　　. . 3 . . . 7 .

oder auch

. . . 4 . . . 8　　. . 3 . . . 7 .
　　　　　und
1 . . . 5 . . .　　. 2 . . . 6 . .

Bei dem ersten Vierflächner heissen die Flächen $A_1 B_n C_m$, $A_{-1} B_{-n} C_m$, $A_{-1} B_n C_{-m}$ und $A_1 B_{-n} C_{-m}$, wie die Flächen eines rhombischen Sphenoids $+\frac{m\bar{P}n}{2}$, der zweite Vierflächner entspricht $+\frac{m\breve{P}n}{2}$, der dritte $-\frac{m\bar{P}n}{2}$ und der vierte $-\frac{m\breve{P}n}{2}$. In jedem Fall wären die gleichwertigen Nebenaxen in verschiedenen Entfernungen und unter verschiedenen Winkeln geschnitten, was der für alle Halb- und Viertelflächner geltenden Bedingung widerspricht.

§ 72. **Die sphenoidische Tetartoedrie.** Wendet man die sphenoidische und pyramidale Hemiedrie gleichzeitig an, so bleiben die Flächen

1 . . . 5 . . .　　. 2 . . . 6 . .
　　　　　oder
. . . 3 . . . 7 .　　. . . 4 . . . 8

oder auch

. . 3 . . . 7 .　　. . . 4 . . . 8
　　　　　und
1 . . . 5 . . .　　. 2 . . . 6 . .

Jede ditetragonale Pyramide zerfällt hiernach in vier verschiedene Viertelflächner. Jeder derselben ist ein Halbflächner einer Pyramide dritter Ordnung, wobei deren einzelne Flächen wachsen oder verschwinden. Dabei müssen wie bei der sphenoidischen Hemiedrie einer Pyramide erster Ordnung Sphenoide entstehen, welche von den in § 52 (Fig. 49 und Fig. 50) besprochenen sich nur durch die Stellung unterscheiden, indem deren Mittelkanten nicht durch die primären Basisecken, sondern durch die Zwischenecken gehen. Man bezeichnet diese Formen als **Sphenoide der Zwischenstellung** oder **Sphenoide dritter Ordnung** mit den Zeichen $\pm\frac{mPn}{4}r$, $\pm\frac{mPn}{4}l$.

Der erste Vierflächner wird gebildet von $A_1\,B_n\,C_m$, $A_{-1}\,B_{-n}\,C_m$, $A_{-n}\,B_1\,C_{-m}$ und $A_n\,B_{-1}\,C_{-m}$. Wird $n = 1$, so erhält man daraus die vier Flächen, welche ein Sphenoid $\frac{mP}{2}$ begrenzen, d. h. die Tetartoedrie der Pyramide erster Ordnung ist mit der Hemiedrie derselben übereinstimmend. Wird $n = \infty$, so entsprechen die vier Flächen den abwechselnden Flächen einer Pyramide zweiter Ordnung, bei deren Wachstum ein von vier gleichschenkligen Dreiecken begrenztes Sphenoid entsteht, das sich von $\frac{mP}{2}$ nur durch die Stellung unterscheidet und als Sphenoid zweiter Ordnung bezeichnet werden kann.

Koordinaten der Ecken sind 1, 0, *mc*.

Das ditetragonale Prisma zerfällt in zwei Prismen dritter Ordnung, wie bei der pyramidalen Hemiedrie allein. Prisma erster Ordnung, Prisma zweiter Ordnung und die Basis bleiben unverändert, wie bei der sphenoidischen und der pyramidalen Hemiedrie.

§ 73. Die tetartoedrischen Formen des hexagonalen Systems. Die zwölfseitige Doppelpyramide, welche den allgemeinsten Fall einer hexagonalen Form darstellt, zerfällt bei den 3 Arten von Hemiedrie in folgender Weise: Bei der rhomboedrischen Hemiedrie sind die beiden Halbflächner

1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .   und   . . 3 4 . . 7 8 . . 11 12
. . 3 4 . . 7 8 . . 11 12   1 2 . . 5 6 . . 9 10 . .

bei der pyramidalen Hemiedrie

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .   und   . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12
1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .   . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12

bei der trapezoedrischen Hemiedrie

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .   und   . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12
. 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12   1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .

Auch hier würden bei gleichzeitiger Anwendung der pyramidalen und der trapezoedrischen Hemiedrie stets nur sechs Flächen an dem oberen oder an dem unteren Ende der Axe C übrig bleiben, so dass also diese Art von Tetartoedrie unmöglich ist, oder vielmehr als Hemimorphie der hemiedrischen Formen aufzufassen wäre. Bei gleichzeitiger Anwendung der rhomboedrischen und pyramidalen Hemiedrie oder der rhomboedrischen und trapezoedrischen Hemiedrie erhält man dagegen mögliche Arten von Tetartoedrie.

§ 74. **Die trapezoedrische Tetartoedrie.** Bei gleichzeitiger Anwendung der rhomboedrischen und trapezoedrischen Hemiedrie bleiben folgende vier Tetartoeder:

1 . . . 5 . . . 9 . . .   . 2 . . . 6 . . . 10 . . .
. . . 4 . . . 8 . . . 12 , . . 3 . . . 7 . . . 11 .

. . . 4 . . . 8 . . . 12   und   . . 3 . . . 7 . . . 11 .
1 . . . 5 . . . 9 . . .   . 2 . . . 6 . . . 10 . .

die man auch mit $+\frac{mPn}{4}r$, $+\frac{mPn}{4}l$, $-\frac{mPn}{4}r$ und $-\frac{mPn}{4}l$ bezeichnen kann. Je drei Flächen stossen in einer Ecke zusammen, in E in Fig. 71 z. B. die Flächen $A_1 B_n C_m$, $A_1 B_s C_{-m}$ und $A_{-s} B_n C_{-m}$.

Die Koordinaten dieser Ecke sind $x = \frac{2}{3}(2-n)$, $y = \frac{2}{3}(2n-1)$, $z = -\frac{mc}{3n}(2-n)(2n-1)$.

Man erhält sechs solche Ecken, drei oben und drei unten. Verbindet man diese unter sich durch drei schärfere und drei stumpfere Mittelkanten, von denen die letzteren die verlängerten Mittelkanten des Skalenoeders sind, und mit den Polecken durch 6 gleich lange Polkanten, so entsteht ein von 6 Trapezoiden begrenztes sogen. **trigonales Trapezoeder** (Fig. 71 ist $+\frac{3/2 P\, 3/2}{4}l$). Die rechten und linken Formen sind enantiomorph, die entsprechenden positiven und negativen Formen nur durch die Stellung verschieden.

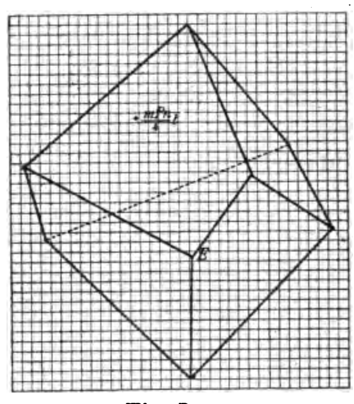


Fig. 71.

Welche Veränderungen die übrigen holoedrischen Formen bei dieser Art von Tetartoedrie erfahren, lässt sich am einfachsten aus der Lage der Eckpunkte in den Spezialfällen $n = 1$, $n = 2$ und $m = \infty$ ersehen.

Bei $n = 1$ wird $x = y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{mc}{3}$; d. h. die Ecke fällt mit der rhomboedrischen Ecke zusammen, und die tetartoedrische Form der Pyramide erster Ordnung mP stimmt mit der hemiedrischen Form mR vollkommen überein. Das Gleiche gilt für die Tetartoedrie des Prismas erster Ordnung, die man wie die Hemiedrie mit ∞R bezeichnen kann.

Bei $n = 2$ wird $x = 0$, $y = 2$, $z = 0$; d. h. es fallen je zwei trapezoedrische Ecken in einem auf einer Nebenaxe gelegenen Punkt zusammen, nämlich dem Punkt, in dem sich zwei nicht benachbarte

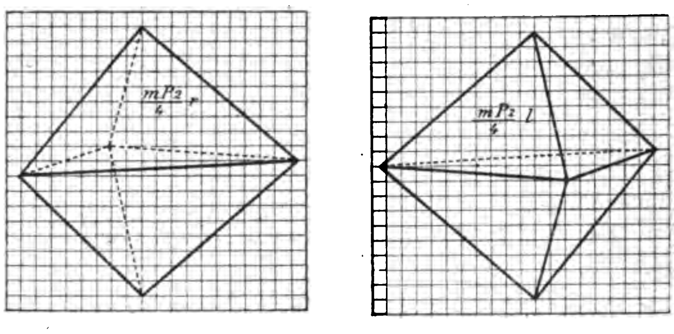


Fig. 72. Fig. 73.

Basiskanten der Pyramide zweiter Ordnung schneiden, es entstehen hierbei zwei sogen. **trigonale Pyramiden** mit drei gleichen Basiskanten und sechs ebenfalls gleichen Polkanten, welche mit den in § 61 besprochenen Formen übereinstimmen. Man kann dieselben mit $\frac{mP2}{4} r$ und $\frac{mP2}{4} l$ (Fig, 72 und 73 in halber Grösse) bezeichnen. Wird $m = \infty$, so verwandeln sich die 6 Mittelkanten der trigonalen Trapezoeder in 6 mit der Hauptaxe parallele Seitenkanten, welche

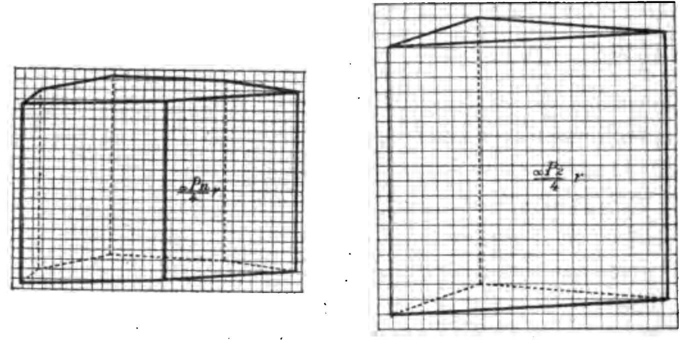


Fig. 74. Fig. 75.

die Nebenaxen abwechselnd in den Entfernungen 1 und n schneiden (vergl. Fig. 28); hierbei entstehen die **ditrigonalen Prismen** $\frac{\infty Pn}{4} l$ und $\frac{\infty Pn}{4} r$, Fig. 74. Die stumpferen Winkel stimmen mit entsprechenden Winkeln an den primären Seitenkanten der zwölfseitigen Prismen überein.

Wird $m = \infty$ und $n = 2$, so verwandelt sich das ditrigonale Prisma in ein **trigonales Prisma** $\frac{\infty P2}{4} l$ oder $\frac{\infty P2}{4} r$, Fig. 75, das also die tetartoedrische Form des Prismas zweiter Ordnung darstellt und aus der trigonalen Pyramide entsteht, wenn $m = \infty$ ist.

Das hexagonale Prisma erster Ordnung bleibt bei dieser Art von Tetartoedrie völlig unverändert, da aus jedem zwischen den primären Hauptschnitten liegenden Raumteil eine Fläche bleibt. Auch die Basis bleibt unverändert.

Eine besondere Eigentümlichkeit der trapezoedrisch-tetartoedrischen Formen besteht darin, dass die Nebenaxen an ihren beiden Enden in verschiedenen Entfernungen und unter verschiedenen Winkeln von Flächen geschnitten werden können, bei dem trigonalen Prisma beispielsweise an dem einen Ende von einer Fläche rechtwinklig, an dem anderen Ende in doppelter Entfernung von zwei Flächen unter Winkeln von 30°. Die Formen sind also in der Richtung der Nebenaxen hemimorph.

Da die Hauptaxe bei diesen tetartoedrischen Formen ebenso wie bei den rhomboedrischen, von denen sie abgeleitet sind, eine dreizählige Symmetrieaxe ist (vgl. § 60), so sind diese Formen, wenn man ein besonderes trigonales System annimmt, ebenfalls demselben zuzurechnen.

§ 75. **Die rhomboedrische Tetartoedrie.** Bei gleichzeitiger Anwendung der rhomboedrischen und der pyramidalen Hemiedrie entstehen folgende vier Formen:

```
1 . . . 5 . . . 9 . . .       . 2 . . . 6 . . . 10 . .
. . 3 . . . 7 . . . 11 .  ,   . . . 4 . . . 8 . . . 12

. . 3 . . . 7 . . . 11 .      . . . 4 . . . 8 . . . 12
1 . . . 5 . . . 9 . . .   ,   . 2 . . . 6 . . . 10 . .
```

Man kann diese Viertelflächner entweder von den Skalenoedern ableiten, indem man von den Flächenpaaren derselben oben die linken und unten die rechten Flächen wachsen oder verschwinden lässt, oder auch von den Pyramiden dritter Ordnung, indem man die abwechselnden Flächen derselben wachsen oder verschwinden lässt. Hierbei muss sich, da die Pyramiden dritter Ordnung von denen erster Ordnung nur durch die Stellung verschieden sind, jedesmal ein Rhomboeder ergeben, das sich von einem Rhomboeder mR nur durch die Stellung unterscheiden kann.

Je drei Flächen schneiden sich dabei in einer rhomboedrischen Zwischenecke, die Flächen $A_l\, B_n\, C_m$, $A_n\, B_{-s}\, C_{-m}$, $A_s\, B_l\, C_{-m}$ z. B. in dem Punkt R Fig. 76 mit den Koordinaten $x = \frac{2n(2n-1)}{3(n^2-n+1)}$, $y = \frac{2n(2-n)}{3(n^2-n+1)}$, $z = -\frac{mc}{3}$. Da bei $n = \frac{3}{2}$ $x = \frac{8}{7}$, $y = \frac{2}{7}$ wird, ist die Zeichnung der Vereinfachung halber in $\frac{7}{8}$ der eigentlichen Grösse gezeichnet, so dass $x = 1$, $y = \frac{1}{4}$ wird, z ist immer $\frac{1}{3}$ der hier willkürlich anzunehmenden Axe c.

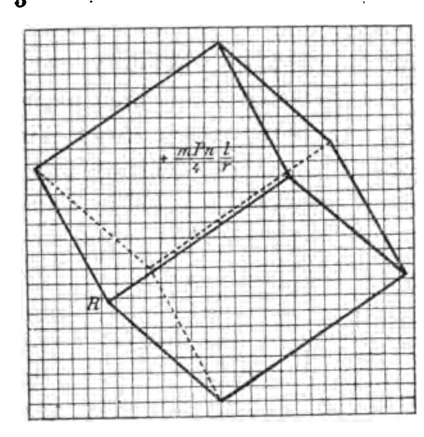


Fig. 76.

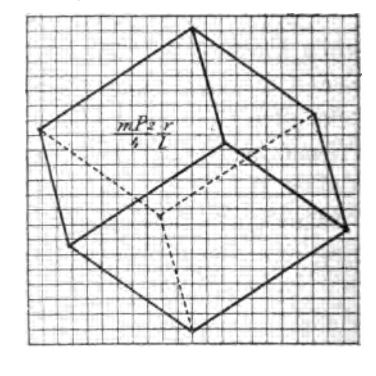


Fig. 77.

Die von der zwölfseitigen Pyramide abzuleitenden vier **Rhomboeder dritter Ordnung** kann man bezeichnen mit $+\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$ (Fig. 76), $+\frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$, $-\frac{mPn}{4}\frac{r}{l}$, $-\frac{mPn}{4}\frac{l}{r}$.

Wird $n = 1$, so wird $x = y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{mc}{3}$, wie bei der hemiedrischen Form mR. Es fallen aber bei $n = 1$ ein linkes und ein rechtes Rhomboeder dritter Ordnung mit dem Rhomboeder erster Ordnung zusammen.

Wird $n = 2$, so wird $x = \frac{4}{3}$, $y = 0$, $z = -\frac{mc}{3}$, d. h. die rhomboedrischen Zwischenecken fallen in die primären Hauptschnitte, statt wie dies bei den Rhomboedern erster Ordnung der Fall ist, in die sekundären Hauptschnitte. Man erhält so als tetartoedrische Form der holoedrischen Pyramide zweiter Ordnung oder auch als Halbflächner der hemiedrischen Pyramide zweiter Ordnung, die mit der holoedrischen übereinstimmt, zwei **Rhomboeder zweiter Ordnung** $\frac{mP_2}{4}\frac{l}{r}$ und $\frac{mP2}{4}\frac{r}{l}$ (Fig. 77 in $\frac{3}{4}$ der gewöhnlichen Grösse).

Das Vorkommen zweier Rhomboeder verschiedener Ordnung genügt zum Erkennen des tetartoedrischen Charakters einer Krystallform.

Die tetartoedrischen Formen, welche von den zwölfseitigen Prismen abzuleiten sind, stimmen mit den Prismen dritter Ordnung, also der pyramidalen Hemiedrie überein, das eine wird von den ungeraden, das andere von den geraden Flächen begrenzt. Das Prisma erster Ordnung und ebenso das Prisma zweiter Ordnung werden bei der Tetartoedrie ebenso wenig wie bei der Hemiedrie verändert; dasselbe gilt auch für die Basis.

Die rhomboedrisch-tetartoedrischen Formen gehören zum trigonalen System.

§ 76. Trigonale Tetartoedrie. Eine andere Unterabteilung dieses Systems, welche aber in der Natur bis jetzt nicht nachgewiesen werden konnte, würde als Tetartoedrie bei gleichzeitiger Anwendung der ditrigonalen und der pyramidalen Hemiedrie aufzufassen sein. Bei der ersteren bleiben z. B. folgende Flächen

1 . . 4 5 . . 8 9 . . 12
1 . . 4 5 . . 8 9 . . 12

bei der letzteren dagegen

1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .
1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 .

bei gleichzeitiger Anwendung beider also

1 . . . 5 . . . 9 . . .
1 . . . 5 . . . 9 . . .

Diese Flächen bilden eine trigonale Doppelpyramide, welche sich von den in Fig. 72 und 73 abgebildeten nur durch die Stellung unterscheidet, und als trigonale Pyramide der Zwischenstellung oder dritter Ordnung zu bezeichnen wäre. Bei $n = 1$ geht dieselbe in eine trigonale Pyramide erster Ordnung über, deren Basisecken auf den Zwischenaxen ($x = 1$, $y = 1$) liegen. Bei $n = 2$ erhält man die trigonale Pyramide zweiter Ordnung (Fig. 72). Bei $m = \infty$ entsteht aus jeder trigonalen Pyramide das entsprechende trigonale Prisma. Die Basis bleibt unverändert.

§ 77. Die Tetartoedrie des regulären Systems. Da es auch im regulären System drei verschiedene Arten von Hemiedrie giebt, so ist anzunehmen, dass auch tetartoedrische Formen möglich sind. Vergleicht man nun die in den Figuren 60, 61 und 62 dargestellten 48-Flächner unter einander, so ergiebt sich leicht, dass einerlei, welche von den drei Arten von Hemiedrie gleichzeitig zur

Anwendung kommen, stets dieselben 12 Flächen weiss bleiben, d. h. zur Ausbildung gelangen. Bei der plagiedrischen Hemiedrie sind in vier Oktanten dieselben Flächen weiss, wie bei der pentagonalen Hemiedrie, in den vier übrigen aber sind die Flächen schwarz, die hier weiss sind. Das gleiche ist bei der tetraedrischen Hemiedrie der Fall. Von den 24 Flächen der Plagieder und Dyakisdodekaeder bleiben die Flächen in vier Oktanten, während die in den vier anderen ausfallen. In jedem Fall erhält man eine von 12 Flächen beerenzte Form, die man am einfachsten aus einem Hexakistetraeder ableitet, indem man die einzelnen Flächen desselben wachsen oder verschwinden lässt, derart, dass jede wachsende Fläche von drei verschwindenden umgeben ist.

An Stelle jeder verschwindenden Fläche ensteht hierbei eine neue „tetartoedrische" Ecke an Stelle von $A_1\ B_n\ C_m$, die von den Flächen $A_1\ B_m\ C_n$, $A_n\ B_1\ C_m$ und $A_1\ B_{-m}\ C_{-n}$ gebildete Ecke mit den Koordinaten $x = 1$, $y = \frac{m^2(n-1)}{n(m^2-n)}$, $z = -\frac{m(n-1)}{m^2-n}$, also bei $\frac{8O^3/_2}{4}$ $x = 1$, $y = \frac{2}{5}$, $z = -\frac{1}{5}$.

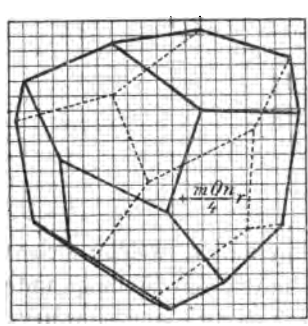


Fig. 78.

Verbindet man diese 12 Ecken paarweise durch Kanten, welche durch die oktaedrischen Ecken gehen und mit je einer hexaedrischen Ecke und einer tetraedrischen Ecke, so erhält man ein von 12 Fünfecken begrenztes „tetartoedrisches Pentagondodekaeder" Fig. 78. Von der Gesamtform erhält man vier Tetartoeder, die man als $+\frac{mOn}{4}r$, $+\frac{mOn}{4}l$, $-\frac{mOn}{4}r$ und $-\frac{mOn}{4}l$ unterscheiden kann. Das rechte positive und das linke posisive und ebenso das rechte negative und linke negative Pentagondodekaeder sind enantiomorph, dagegen unterscheiden sich die beiden rechten und die beiden linken Tetartoeder nur durch ihre Stellung.

Jedes tetartoedrische Pentagondodekaeder hat ausser den 12 tetartoedrischen Ecken, an denen je 3 ungleiche Kanten zusammenstossen, noch 4 dreikantige hexaedrische Ecken des entsprechenden Dyakisdodekaeders und 4 dreikantige tetraedrische Ecken, die ihrer Lage nach mit den tetraedrischen Ecken des entsprechenden Hexakistetraeders übereinstimmen. Kanten sind 6 + 12 + 12 = 30 vorhanden.

Bei den übrigen regulären Formen stimmen die tetartoedrischen Formen mit den hemiedrischen überein, es ist also $\frac{mOm}{4} = \frac{mOm}{2}$ ein Trigondodekaeder, $\frac{mO}{4} = \frac{mO}{2}$ ein Deltoiddodekaeder, $\frac{\infty On}{4} = \frac{\infty On}{2}$ ein Pentagondodekaeder, $\frac{O}{4} = \frac{O}{2}$ ein Tetraeder, und Rhombendodekaeder und Würfel werden bei der Tetartoedrie ebenso wenig verändert, wie bei den Hemiedrien.

X. Kapitel.

Kombinationen von Flächen mit ungleicher Centraldistanz.

§ 78. Ungleiche Centraldistanz gleichwertiger Flächen. Alle im Vorhergehenden beschriebenen Formen stellen dadurch, dass für alle an denselben auftretenden Flächen dieselbe Centraldistanz angenommen wurde, gleichsam Idealgestalten dar, die in der Natur nur ausnahmsweise vorkommen. Bei den natürlichen Krystallen zeigen vielmehr auch die Flächen der einfachen Formen zwar gleiches Axenverhältnis, aber sehr verschiedene Centraldistanz. Dabei bleiben zwar die Winkel, welche die einzelnen Flächen mit einander bilden, konstant, die Form dieser Flächen aber und die Länge und Anzahl der Kanten, sowie Art und Zahl der Ecken ist sehr veränderlich, und erscheinen deshalb die natürlichen Krystalle sehr häufig als verzerrte Formen. Einige Beispiele an Formen des regulären Systems mögen dies erläutern.

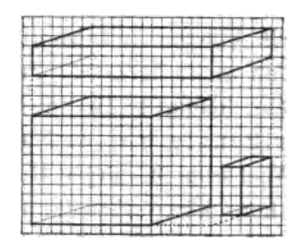


Fig. 79.

Das Hexaeder $\infty O \infty$ ist in der Natur nur ganz ausnahmsweise gleich dem Würfel der Stereometrie von 6 Quadraten begrenzt, vielmehr gewöhnlich von drei Paaren verschiedener Rechtecke. Spaltet man von einem Würfel von Steinsalz beliebige Stücke durch Spaltungsflächen, welche bei diesem Mineral stets mit den Würfelflächen parallel sind, ab (vergl. Fig. 79), so bleibt jedes der Stücke krystallographisch ein Würfel, weil man in jedes derselben ein reguläres Axenkreuz hinein-

denken kann, derart, dass jede Fläche mit zwei Axen parallel geht und die dritte schneidet. Nur die Centraldistanz der Flächen ist verschieden.

Ganz ähnlich ist es bei dem Oktaeder. Während ein Oktaeder der Stereometrie stets von 8 gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird, ist dies an Krystallen nur ausnahmsweise der Fall und es treten Trapeze und Sechsecke an die Stelle der gleichseitigen Dreiecke, sobald die Centraldistanz der Flächen verschieden ist. In Fig. 80 hat die Fläche vorn rechts unten die Centraldistanz 0 bekommen, die zwischen ihr und der parallelen Fläche liegenden Kanten sind bei der parallelen Verschiebung alle im gleichen Verhältnis (auf die Hälfte) verkürzt worden,

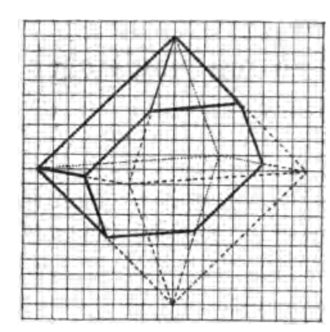


Fig. 80.

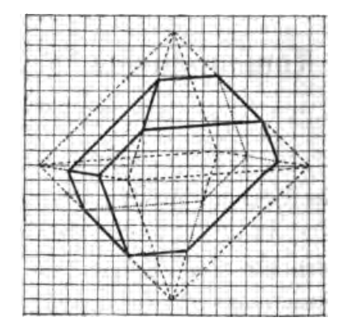


Fig. 81.

dabei sind drei Trapeze und ein Sechseck an die Stelle von ebenso viel gleichseitigen Dreiecken getreten. Auch die Anzahl der Ecken hat sich geändert, indem an die Stelle von drei vierseitigen oktaedrischen Ecken sechs dreiseitige neue Ecken getreten sind. Noch grösser erscheint die Veränderung, wenn wie in Fig. 81 zwei parallele Flächen gleichzeitig verschoben werden (Centraldistanz = $^1/_8$). Man sieht derartige Formen, Oktaeder ohne gleichseitige Dreiecke, sehr häufig z. B. an Magneteisen oder Alaunkrystallen. Die eine trigonale Axe erscheint in diesem Falle (auf $\frac{1}{8}$) verkürzt, das Wachstum in dieser Richtung behindert, wie bei Krystallen, die mit einer Oktaederfläche auf dem Boden eines Gefässes aufliegend weiterwachsen, während ganz frei aufgehängte Krystalle auch der Idealgestalt näherkommen.

Fig. 82 stellt ein verzerrtes Oktaeder dar, bei dem eine rhombische (zweizählige) Zwischenaxe auf $\frac{5}{8}$ der ursprünglichen Länge vergrössert ist, oder bei der vier Flächen die Centraldistanz $\frac{5}{8}$ statt 1 haben. Die Symmetrie der Form wird hierbei geringer und zwar

wie die eines rhombischen Krystalls, von dem sich ein Krystall dieser Form äusserlich nur dadurch unterscheidet, dass alle Flächen gleiche Beschaffenheit haben. Während bei der Verlängerung in der Richtung der rhombischen Zwischenaxe der Krystall rhombischen Habitus bekommt, entstehen bei Verlängerung einer trigonalen Axe, wie sie die Fig. 83 für das Rhombendodekaeder ∞O darstellt, verzerrte Formen, welche hexagonalen, rhomboedrischen oder trigonalen Habitus zeigen. Die trigonale Axe entspricht dabei einer Hauptaxe.

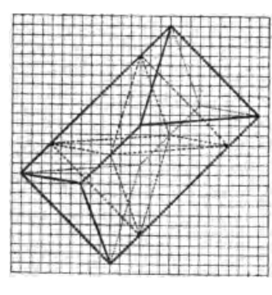


Fig. 82.

Fig. 83.

In Fig. 83 sind 3 Flächen in den Abstand 3 statt 1 gerückt, dadurch, dass man 6 parallele Kanten doppelt so gross gezeichnet hat. Geht man von der Mitte der Form aus, so erscheinen 6 Flächen im Abstand $\frac{3}{2}$ statt 1.

§ 79. Schnittpunkt zweier Geraden, deren Axenverhältnis und Centraldistanz gegeben ist.

Wird eine Gerade G^1, welche die A-Axe in A^1 und die B-Axe in B^1 schneidet, in die $d_1$fache Entfernung von O gerückt (vergl. Fig. 2 S. 2), so schneidet sie die Axen in den Entfernungen $d_1 . OA^1$ und $d_1 OB^1$ und gilt für die Koordinaten eines auf derselben liegenden Punktes die Gleichung:

$$\frac{x}{d_1 OA^1} + \frac{y}{d_1 OB^1} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{a_1 x}{d_1} + \frac{b_1 y}{d_1} = 1,$$

ebenso für die Gerade G_2 in der Centraldistanz d_2 die Gleichung:

$$\frac{a_2 x}{d_2} + \frac{b_2 y}{d_2} = 1.$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes heissen dann (vergl. § 2)

$$x = \frac{\frac{b_2}{d_2} - \frac{b_1}{d_1}}{\frac{a_1 b_2}{d_1 d_2} - \frac{a_2 b_1}{d_2 d_1}} = \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

$$y = \frac{a_1 d_2}{a_1 b_2} - \frac{a_2 d_1}{a_2 b_1}.$$

§ 80. **Schnittpunkt von 3 Ebenen, deren Axenverhältnis und Centraldistanz gegeben ist.**

In gleicher Weise, wie sich in der Gleichung, welche für die Koordinaten der auf einer Geraden liegenden Punkte gilt, die Koefficienten der Unbekannten ändern, ändern sich dieselben auch in den im § 54 aufgestellten Gleichungen für die Koordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen. Multipliciert man, um die hierbei auftretenden Brüche wegzuschaffen, alle Glieder im Zähler und Nenner der Ausdrücke für x, y und z mit $d_1\, d_2\, d_3$ dem Produkt aus den Centraldistanzen der drei Ebenen, so heissen die vereinfachten Ausdrücke

$$x = \frac{d_1\,\alpha_2 + d_2\,\alpha_2 + d_3\,\alpha_3}{\Sigma \pm a_1\,b_2\,c_3} = \frac{d_1\,\alpha + d_2\,\alpha_2 + d_3\,\alpha_3}{a_1\,\alpha_1 + a_2\,\alpha_2 + a_3\,\alpha_3},$$

$$y = \frac{d_1\,\beta_1 + d_2\,\beta_2 + d_3\,\beta_3}{\Sigma \pm a_1\,b_2\,c_3}, \quad z = \frac{d_1\,\gamma_1 + d_2\,\gamma_2 + d_3\,\gamma_3}{\Sigma + a_1\,b_2\,c_3}$$

§ 81. **Offene und geschlossene Formen.** Offene Formen, wie Prismen, Domen und Pinakoide oder die Formen des monoklinen und triklinen Systems können nur in Kombination mit anderen Formen einen Krystall allseitig begrenzen. Vergl. die Figuren 10—20, 25—27, 32—34. Die Centraldistanz aller hierbei auftretenden Flächen kann gleich 1 sein. Auch geschlossene Formen, wie z. B. rhombische Makro- und Brachy-Pyramiden, können in Kombination mit einander treten, ohne dass die Centraldistanz der Flächen derselben grösser oder kleiner als 1 werden muss (vergl. Fig. 22). Viele andere Formen können dagegen an demselben Krystall in Kombination nur dann auftreten, wenn die Centraldistanz der Flächen der einen Form kleiner oder grösser als 1 geworden ist. In diesen Fällen werden die Ecken oder Kanten der einen Form durch die Flächen der anderen auf verschiedene Weise verändert, und zwar werden die Ecken abgestumpft, zugeschärft oder zugespitzt, die Kanten abgestumpft oder zugeschärft.

§ 82. **Abstumpfung der Ecken.** Eine Ecke heisst abgestumpft, wenn an ihrer Stelle eine Fläche erscheint.

Die 3 Pinakoide sind bei einer rhombischen Pyramide zu den 3 Hauptschnitten parallel und würden bei der Centraldistanz 1 durch die Ecken der Grundform gehen. Denkt man sich nun eine Pinakoidfläche parallel gegen die Mitte zu verschoben, so wird die Spitze der Pyramide auf dieser Seite abgestumpft. Die Kanten werden bei dieser Parallelverschiebung in demselben Verhältnis verkürzt, und umgekehrt erhält man eine Fläche in paralleler Lage, wenn man die Kanten, wie dies in Fig. 84 geschehen ist, in gleichem Verhältnis verkürzt. Die Polecken sind hier durch die Basis in der Central-

distanz $\frac{2}{3}$, die brachydiagonalen Basisecken durch das Makropinakoid ($d = \frac{1}{2}$) abgestumpft,

Gleiche Ecken werden durch Flächen derselben Form abgestumpft, ungleiche durch Flächen verschiedener Formen. So werden also z. B. die 4 gleichen Basisecken einer tetragonalen Pyramide mP durch die 4 Flächen des Prismas zweiter Ordnung $\infty P \infty$ abgestumpft, die Polecken durch die Basis $0P$. Die 6 gleichen Ecken

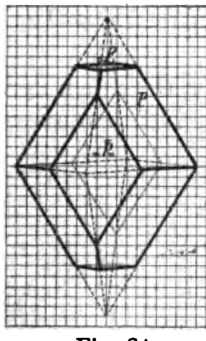


Fig. 84.

Fig. 85.

des Oktaeders werden dagegen durch eine sechsflächige reguläre Form, den Würfel $\infty O \infty$, abgestumpft (Fig. 85). Die Centraldistanz aller Flächen des Würfels kann hierbei gleich sein (in Fig. 85 $d = \frac{2}{3}$), oder auch verschieden, aber stets kleiner als 1. Je näher an 1 die Centraldistanz ist, desto kleiner die abstumpfende Fläche

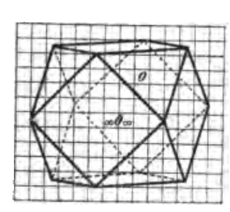


Fig. 86.

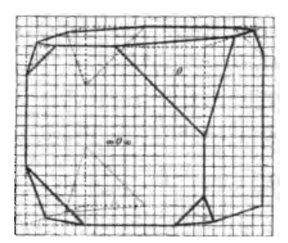


Fig. 87.

und desto vorherrschender die Form des Oktaeders. Wird für $\infty O \infty$ $d = \frac{1}{2}$, wie in Fig. 86, so fallen die Oktaederkanten ganz weg, und es entsteht ein sogenannter Mittelkrystall, der nur Kombinationskanten hat, die die Mitten der ursprünglichen Oktaederkanten ($x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$) unter einander verbinden. Wird andererseits die Centraldistanz für die Oktaederflächen zwei- bis dreimal so gross als die des Würfels, so herrscht die letztere Form vor,

und die Ecken derselben werden mehr oder weniger stark durch die 8 Flächen von O abgestumpft (Fig. 87).

Die Kanten des Würfels werden hierbei an jeder Ecke in gleichem Verhältnis verkürzt, an verschiedenen bei ungleicher Centraldistanz verschieden, bei der Centraldistanz $d = 3$ für O bleibt eine Ecke unverändert, da die Koordinaten der Mitte einer Oktaederfläche $^1/_3$ der Axenlänge beträgt.

Bei Formen mit verschiedenen Ecken, wie z. B. bei ∞O, dem Rhombendodekaeder, werden nicht notwendigerweise alle Ecken zugleich abgestumpft, sondern die oktaedrischen durch $\infty O \infty$, die trigonalen durch O.

Im ersteren Falle (Fig. 88) kann man ∞O als den Pyramidenwürfel $\infty O n$ ansehen, bei dem $n = 1$ geworden ist, und es erscheinen

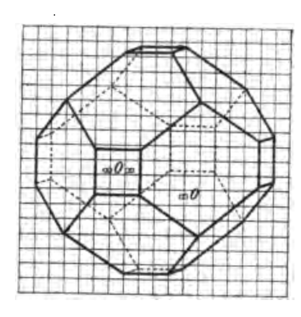


Fig. 88.

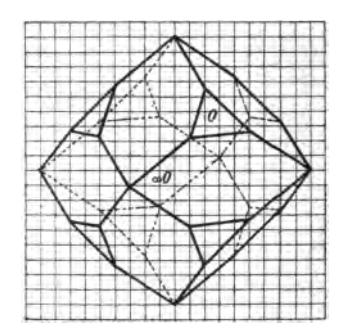


Fig. 89.

dann die Spitzen der Pyramiden desselben abgestumpft. Im zweiten Fall, Fig. §9, kann man ∞O als das Triakisoktaeder mO ansehen, bei dem $m = \infty$ geworden ist, und es werden dann die Spitzen der Pyramiden des Pyramidenoktaeders abgestumpft. In beiden Fällen werden die Kanten an jeder Ecke in gleichem Verhältnis verkürzt.

§ 83. **Abstumpfung der Kanten.** Eine Kante heisst abgestumpft, wenn an ihrer Stelle eine Fläche erscheint.

In Fig. 18 S. 19 erscheint eine rhombische Pyramide in einer Kombination des Primas ∞P mit der Basis $0P$ eingeschlossen.

In gleicher Weise, wie nun bei Verkleinerung der Centraldistanz der Basis die Polecken abgestumpft werden, wird bei Verkleinerung der Centraldistanz der Prismenfläche eine andere Veränderung an der Pyramide eintreten, die Basiskanten fallen weg, an ihre Stelle treten die Prismenflächen, und die Polkanten werden, wie dies Fig. 90 zeigt, durch die Seitenkanten des Prismas verkürzt. Die Kombinationskanten zwischen den Prismen- und Pyramidenflächen

sind zu den ursprünglichen Basiskanten parallel. Je kleiner die Centraldistanz der Prismenflächen, desto mehr erhält die Kombination ein prismatisches Aussehen (Habitus). In ähnlicher Weise, wie die Basiskanten durch Prismen, werden die Polkanten durch Domen abgestumpft, und zwar die brachydiagonalen Polkanten durch ein Makro-

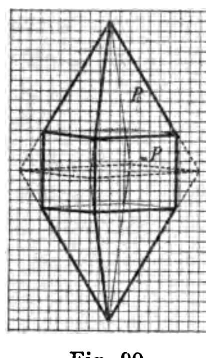


Fig. 90.

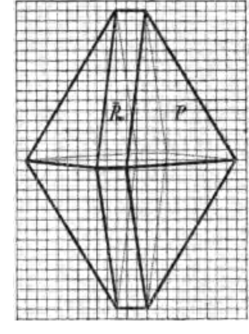


Fig. 91.

doma (Fig. 91), die makrodiagonalen Polkanten durch ein Brachydoma.

Es ist für das Aussehen der Kombination einerlei, ob die Centraldistanz der einen Form verkleinert oder die der anderen vergrössert wird. In Fig. 91 ist für das Doma die Centraldistanz 1 beibehalten, dagegen die Centraldistanz

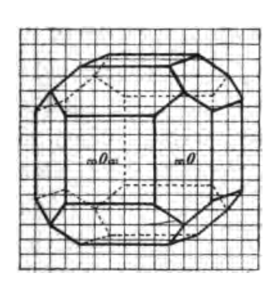


Fig. 92.

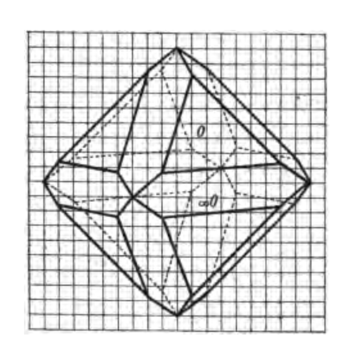


Fig. 93.

der Pyramidenflächen zu $\frac{7}{6}$ angenommen und die Zeichnung auf einfachste Weise dadurch zu stande gekommen, dass die beiden Hälften der Pyramide gleichsam auseinandergezogen wurden. Je länger dabei die horizontalen Kanten des Domas gemacht werden, desto grösser ist die Centraldistanz der Pyramidenflächen.

Kanten werden stets abgestumpft durch Flächen, deren Axenverhältnis in zwei von den drei Werten mit dem der Flächen der

anderen Form übereinstimmt, oder solche Flächen, die bei der Centraldistanz 1 durch die Punkte gehen, welche die abzustumpfende Kante verbindet. Es werden also die Kanten einer Brachypyramide $m\breve{P}n$ nur durch das Brachyprisma $\infty\breve{P}n$ von gleichem n, oder das Makro- und Brachydoma $m\bar{P}\infty$ und $m\breve{P}\infty$ von gleichem m abgestumpft. Die kantenabstumpfende Form muss soviel Flächen haben, als Kanten der betreffenden Art vorhanden sind, darf aber selbst nicht Kanten dieser Art haben. So werden die 12 oktaedrischen Kanten des Oktaeders O (Fig. 93) und der Pyramidenoktaeder mO und ebenso die 12 hexaedrischen Kanten des Würfels $\infty O\infty$ (Fig. 92) und der Pyramidenwürfel ∞On durch die 12 Flächen des Rhombendodekaeders ∞O abgestumpft, die 24 dodekaedrischen Kanten von ∞O aber durch einen Vierundzwanzigflächner, der keine dodekaedrischen Kanten hat (s. § 38), also das Ikositetraeder $mOm = 2O2$, dessen trigonale Ecke mit der von ∞O zusammenfällt ($x = y = z = {}^1/_2$) Fig. 94.

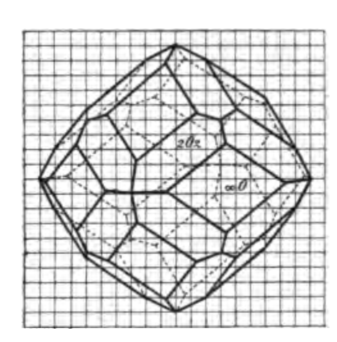


Fig. 94.

Fig. 92 unterscheidet sich von Fig. 88 nur dadurch, dass die Centraldistanz von $\infty O\infty$ nur $\frac{3}{8}$, statt $\frac{5}{8}$, genommen und die Kanten um $\frac{2}{8}$, statt um $\frac{1}{8}$, verkürzt wurden. Ebenso ist in Fig. 93 die Centraldistanz von O $\frac{7}{8}$, statt wie in Fig. 89 $= \frac{4}{8}$, und die Verkürzung der Kanten $\frac{2}{8}$, statt $\frac{1}{8}$. Fig. 94 wird erhalten, indem man an $2O2$ (Fig. 37) alle Kanten um $\frac{2}{8}$ ihrer Länge verkürzt.

§ 84. **Zonen.** Die Kombinationskanten, welche bei der Abstumpfung von Kanten auftreten, sind stets unter sich und zu diesen parallel. Dies ist das Kennzeichen dafür, dass Flächen derselben „Zone" angehören. Unter einer Zone versteht man nämlich die Gesamtheit aller Flächen, welche zu derselben Linie (Zonenaxe) parallel sind. Derartige Flächen schneiden sich in parallelen Kanten, deren Schnittpunkt also im Unendlichen liegt, d. h. dessen Koordinaten $= \infty$ werden.

Dies geschieht offenbar, wenn in den Ausdrücken (§ 79) für diese Koordinaten der Nenner $= 0$ wird. Dieser Nenner ist aber die aus den reciproken Axenabschnitten dreier Flächen gebildete Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3$ und von der Centraldistanz der Flächen unabhängig. Die Gleichung $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 = 0$ ist also die Zonengleichung.

Mit Hilfe dieser Zonengleichung lässt sich leicht die Fläche bestimmen, welche eine Kante abstumpft. Es sei z. B. zu bestimmen, wie gross das m des Ikositetraeders mOm ist, durch welche die Kante zwischen zwei Flächen von ∞O, etwa $A_1 B_1 C\infty$ und $A_1 B\infty C_1$ abgestumpft wird (Fig. 94). Die Determi-

nante aus den reciproken Ableitungszahlen dieser Flächen und der abstumpfenden Fläche $A_1 B_m C_m$ wird $= 0$ gesetzt.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0$$

Die Auflösung der Determinante giebt die Gleichung

$$1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0, \text{ also } m = 2.$$

§ 85. Zuschärfung der Kanten. Eine Kante heisst zugeschärft, wenn an ihrer Stelle eine andere Kante erscheint, in der zwei Flächen unter stumpferem Winkel zusammenstossen. Die vier Flächen müssen, weil in parallelen Kanten zusammenstossend, derselben Zone angehören. So werden z. B. die Kanten eines Prismas durch die Flächen eines anderen zugeschärft, die Basiskanten einer Pyramide durch die Flächen einer spitzeren derselben Art (Fig. 95),

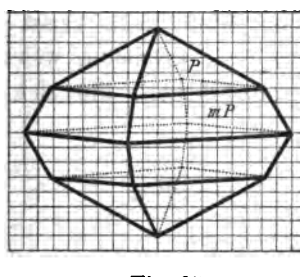


Fig. 95.

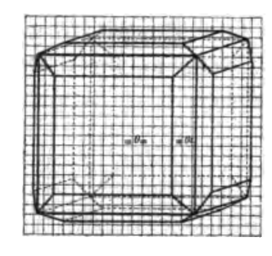


Fig. 96.

die brachydiagonalen Polkanten durch die Flächen einer Makropyramide. Im regulären System werden die Würfelkanten durch einen Pyramidenwürfel ∞On Fig. 96, die Oktaederkanten durch ein Pyramidenoktaeder mO, die Tetraederkanten durch ein Pyramidentetraeder $\frac{mOm}{2}$, die Kanten des Rhombendodekaeders durch die Flächen eines Hexakisoktaeders, der das allgemeine Zeichen $mO\frac{m}{m-1}$ hat, also z. B. $3O^3/_2$ zugeschärft.

Das letztere ergiebt sich aus der durch die Zone gegebenen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0 \text{ oder } 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} = 0;$$

denn darnach ist $n = \frac{m}{m-1}$.

Fig. 95 stellt die rhombische Pyramide $P(a:b:c = 0{,}6\overline{6}:1:0{,}5\overline{5}.\ d = \frac{1}{5})$ mit der Pyramide $mP = 3P$ $(d = 1)$ dar. Die Koordinaten des Schnittpunktes

der makrodiagonalen Polkanten $B_1 C_3$ ($d_1 = 1$) und $B_1 C_1$ ($d_2 = \frac{7}{5}$) ergeben sich nach § 79 aus den Ausdrücken

$$y = \frac{c_2 d_1 - c_1 d_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} \text{ und } z = \frac{b_1 d_2 - b_2 d_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1},$$

$$y = \frac{1.1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{5}}{1.1 - 1.\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}, \quad z = \frac{1.\frac{7}{5} - 1.1}{1.1 - 1.\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

Der Punkt liegt also $\frac{4}{5} . 9$ Quadratseiten nach rechts und $\frac{3}{5} . 5 =$ Quadratseiten ($b : c = 9 : 5$) nach oben. Der Schnittpunkt auf den brachydiagonalen Polkanten hat die Koordinaten $x = \frac{4}{5}$ der verkürzten A-Axe und $z = 3$ Quadratseiten nach oben. Fig. 96 zeigt den Würfel in der Centraldistanz 1 und den Pyramidenwürfel $\infty O 2$ $\left(d = \frac{4}{3}\right)$, die dodekaedrischen Kanten erscheinen dabei auf $\frac{1}{4}$ ihrer Länge verkürzt. Von den Koordinaten der neuen Ecke ist eine $= 1$, die beiden anderen $= \frac{2}{3}$. Die trigonale Ecke hat die Koordinaten $x = y = z = \frac{8}{9}$.

§ 86. **Zuspitzung der Ecken.** Eine Ecke heisst zugespitzt, wenn an ihrer Stelle eine neue Ecke erscheint, welche von der gleichen oder doppelten Anzahl von Flächen, die sich unter

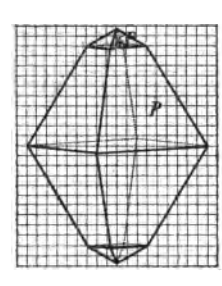


Fig. 97.

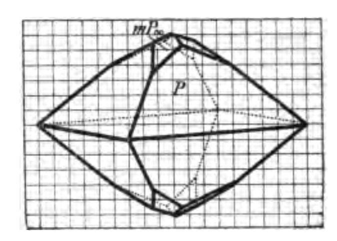


Fig. 98.

stumpferen Winkeln schneiden, gebildet wird. Denkt man sich die stumpfere Pyramide in Fig. 95 in grössere Centraldistanz gerückt, wodurch die spitzere Pyramide zur vorherrschenden Form wird, wie in Fig. 97, so erscheint die Polecke dieser letzteren zugespitzt, und zwar sind in diesem Fall die Flächen auf den Flächen aufgesetzt. In andern Fällen erscheinen auch die Zuspitzungsflächen auf den Kanten aufgesetzt, wie in Fig. 98, welche eine tetragonale Pyramide erster Ordnung mit durch eine stumpfere Pyramide zweiter Ordnung zugespitzten Polecken darstellt. Eine Zuspitzung der ersteren Art erfolgt durch Formen, welche die gleiche Art Kanten hat, die letztere durch Formen, welchen die Art Kanten, auf denen die Zu-

spitzungsformen aufgesetzt sind, in diesem Fall die primären Polkanten, fehlen. Durch eine ditetragonale Pyramide würden entweder die Basisecken vierflächig oder die Polecken achtflächig zugespitzt, das erstere durch eine spitzere, das letztere durch eine stumpfere Pyramide.

Die Kombination zweier beliebiger Formen des tetragonalen Systems hat im allgemeinen zweierlei Kombinationsecken, welche dreierlei Lagen haben können. Entweder fallen dieselben als Schnittpunkt zweier Basiskanten in den basischen Hauptschnitt oder als Schnittpunkte zweier primären oder zweier sekundären Polkanten in den primären oder den sekundären Hauptschnitt. Die Koordinaten dieser Ecken lassen sich auf folgende Weise berechnen. $m_1 P n_1$ mit der Centraldistanz d_1 und $m_2 P n_2$ mit der Centraldistanz d_2 haben im basischen Hauptschnitt die Kanten $A_{d_1} B_{d_1 n_1}$ und $A_{d_2} B_{d_2 n_2}$. Die Determinante der reciproken Koefficienten ist

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1} & \frac{1}{d_1 n_1} \\ \frac{1}{d_2} & \frac{1}{d_2 n_2} \end{vmatrix}, \text{ daraus ergiebt sich (s. § 2), } da\ a = b = 1,$$

$$1)\ x = \frac{\frac{1}{d_2 n_2} - \frac{1}{d_1 n_1}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_2} - \frac{1}{d_1 d_2 n_1}} = \frac{\frac{d_1}{n_2} - \frac{d_2}{n_1}}{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}$$

$$y = \frac{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_2} - \frac{1}{d_1 d_2 n_1}} = \frac{d_2 - d_1}{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}}.$$

Die beiden Formen haben im primären Hauptschnitt die Kanten $A_{d_1} C_{d_1 m}$ und $A_{d_2} C_{d_2 m_2}$. Die Determinante heisst also

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1} & \frac{1}{d_1 m_1} \\ \frac{1}{d_2} & \frac{1}{d_2 m_2} \end{vmatrix}, \text{ daher findet man}$$

$$2)\ x = \frac{\frac{d_1}{m_2} - \frac{d_2}{m_1}}{\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}},\ z = \frac{d_2 - d_1}{\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1}}\ c.$$

Im sekundären Hauptschnitt tritt an Stelle der Nebenaxe eine Zwischenaxe, der Abschnitt OR_1 auf derselben ist $\frac{d_1 \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{n_1}}$, der Abschnitt OR_2 ist $\frac{d_2 \sqrt{2}}{1 + \frac{1}{n_2}}$ (vgl. § 29).

Die zur Berechnung der Koordinaten dienende Determinante ist daher

$$\begin{vmatrix} \frac{1 + \frac{1}{n_1}}{d_1 \sqrt{2}} & \frac{1}{d_1 m_1} \\ \frac{1 + \frac{1}{n_2}}{d_2 \sqrt{2}} & \frac{1}{d_2 m_2} \end{vmatrix},$$

daraus bestimmen sich die Werte r (Länge in der Richtung OR)

$$= \frac{\frac{1}{d_2 m_2} - \frac{1}{d_1 m_1}}{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{d_1 d_2 m_2 \sqrt{2}} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{d_1 d_2 m_1 \sqrt{2}}} = \frac{\frac{d_1}{m_2} - \frac{d_2}{m_1}}{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{m_2} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{m_1}} \cdot \sqrt{2}$$

also 3) $x = y = \dfrac{\frac{d_1}{m_2} - \frac{d_2}{m_1}}{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{m_2} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{m_1}}$ und

$$z = \frac{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{d_1\sqrt{2}} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{d_2\sqrt{2}}}{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{d_1 d_2 m_2 \sqrt{2}} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{d_1 d_2 m_1 \sqrt{2}}} = \frac{d_2\left(1+\frac{1}{n_1}\right) - d_1\left(1+\frac{1}{n_2}\right)}{\frac{1+\frac{1}{n_1}}{m_2} - \frac{1+\frac{1}{n_2}}{m_1}}.$$

Fig. 97 ist eine Kombination von P ($a : b : c = 0{,}66\bar{6} : 1 : 1{,}66\bar{6}$, $d_1 = 1$) mit $\frac{1}{3} P \left(d_2 = \frac{7}{3}\right)$. Die Koordinaten berechnet man mit der Formel unter 2), die auch für die Polkanten rhombischer Pyramiden gilt $x = \frac{1}{3} a$, $y = 0$, $z = \frac{2}{3} c$, und $x = 0$, $y = \frac{1}{3} b$, $z = \frac{2}{3} c$.

Fig. 98 ist eine Kombination von P ($a : c = 1 : 0{,}77\bar{7}$, $d_1 = 1$) mit $\frac{3}{8} P \infty$ $\left(d_2 = \frac{9}{7}\right)$. Daher findet man für die Koordinaten der Ecken auf den primären Polkanten nach Formel 2) $x = \frac{3}{7}$, $y = 0$, $z = \frac{4}{7} c$. und für die Koordinaten auf den sekundären Polkanten nach Formel 3) $x = y = \frac{3}{28}$, $z = \frac{11}{14} c$.

§ 87. **Zuschärfung der Ecken.** Eine Ecke heisst zugeschärft, wenn an ihrer Stelle eine Kante erscheint, in der zwei Flächen zusammenstossen, die einer Form angehören, welche die betreffende Art von Ecken nicht hat, aber doppelt so viel Flächen als Ecken der gleichen Art zugeschärft werden. Es werden z. B. die Ecken der rhombischen Pyramiden, die stets paarweise vorhanden sind, durch Prismen oder Domen zugeschärft, und zwar die brachydiagonalen Basisecken durch steile Makrodomen oder Makroprismen, je nachdem die an Stelle der Ecke tretende Kante horizontal (Fig. 99) oder vertikal ist, die makrodiagonalen Basisecken durch Brachydomen oder Brachyprismen, die Polecken dagegen durch flache Makro- oder Brachydomen, je nachdem die Kante zu der B-Axe oder der A-Axe parallel ist.

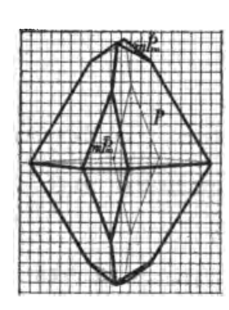


Fig. 99.

Die primären Basisecken tetragonaler Pyramiden werden durch die Flächen von spitzen Pyramiden zweiter Ordnung (Fig. 100), die sekundären Basisecken durch die Flächen von Pyramiden erster Ordnung zugeschärft (Fig. 101). Die Figuren zeigen zugleich die Abstumpfung der Polkanten der Pyramiden zweiter Ordnung durch die Flächen einer Pyramide erster Ordnung und umgekehrt.

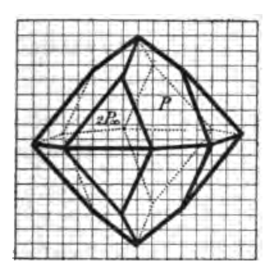


Fig. 100.

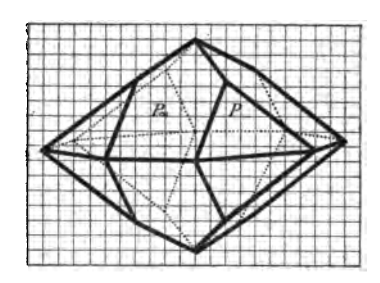


Fig. 101.

Im regulären System werden nur die oktaedrischen und die rhombischen Ecken zugeschärft, die ersteren durch ein Pentagondodekaeder (Fig. 102), die letzteren durch Pyramidenwürfel oder Pyramidenoktaeder, je nachdem die Kante in eine Hauptsymmetrieebene fällt oder in eine gewöhnliche. An drei- oder sechsflächigen Ecken giebt es keine Zuschärfung.

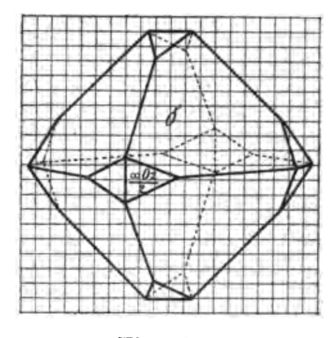


Fig. 102.

Fig. 99 ist eine Kombination der Pyramide P $(a:b:c = 0{,}66\bar{6}:1:1{,}66\bar{6},\ d_1 = 1)$ mit $^2/_5\ \breve{P}\infty$ $(d_2 = 2)$. Die Ecke auf den makrodiagonalen Polkanten hat nach Formel 2) die Koordinaten $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$. Für die Koordinaten der Ecke im brachydiagonalen Hauptschnitt, die im allgemeinen der Schnittpunkt von $A_{d_1 n_1} C_{d_1 m_1}$ und $A_{d_2 n_2} C_{d_2 m_2}$ ist, ergiebt sich mit Hilfe der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1 n_1} & \frac{1}{d_1 m_1} \\ \frac{1}{d_2 n_2} & \frac{1}{d_2 m_2} \end{vmatrix}$$

$$4)\quad x = \frac{\frac{1}{d_2 m_2} - \frac{1}{d_1 m_1}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_1 m_2} - \frac{1}{d_1 d_2 n_2 m_1}} = \frac{\frac{d_1}{m_2} - \frac{d_2}{m_1}}{\frac{1}{n_1 m_2} - \frac{1}{n_2 m_1}},$$

$$z = \frac{\frac{1}{d_1 n_1} - \frac{1}{d_2 n_2}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_1 m_2} - \frac{1}{d_1 d_2 n_2 m_1}} = \frac{\frac{d_2}{n_1} - \frac{d_1}{n_2}}{\frac{1}{n_1 m_2} - \frac{1}{n_2 m_1}},$$

also hier $x = \frac{1}{5} a$, $z = \frac{4}{5} c$. Fig. 99 zeigt ausserdem die Kombination mit $2\bar{P}\infty \left(d_2 = \frac{3}{4}\right)$. Die Koordinaten im basischen Hauptschnitt sind nach Formel 1) $x = \frac{3}{4} a$, $y = \frac{1}{4}$, diejenigen auf der Polkante nach Formel 2) $x = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

Fig. 100 ist Kombination von P ($a : c = 1 : 0{,}77\bar{7}$ $d_1 = 1$) mit $2P\infty$ $\left(d_2 = \frac{2}{3}\right)$. Die Koordinaten der Ecken im basischen Hauptschnitt nach Formel 1) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. Die Koordinaten der Ecken im primären Hauptschnitt sind nach Formel 2) $x = \frac{1}{3}$, $z = c$.

Fig. 101 ist Kombination von P ($d_1 = \frac{4}{3}$) mit $P\infty$ ($d_2 = 1$), daher für die Ecken im basischen Hauptschnitt (nach Formel 1) $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, für die Ecken im sekundären Hauptschnitt (nach 3) $x = y = \frac{2}{3}$. Die Abstumpfung der Polkanten einer primären Pyramide mP erfolgt durch die Flächen einer sekundären Pyramide $m'P\infty$, wobei $m' = m$ ist, da in diesem Fall die Determinante aus den reciproken Ableitungszahlen der Flächen $A_1 B_n C_m$, $A_1 B_{-n} C_m$ und $A_1 B_\infty C_{m'}$ gleich 0 wird,

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{m} \\ 1 & -\frac{1}{n} & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & \frac{1}{m'} \end{vmatrix} = 0,$$ was man schon daran erkennen kann, dass, wenn $m' = m$ gesetzt wird, in zwei Reihen der Determinante die 3 Elemente einander gleich werden, in welchem Fall dieselbe stets den Wert 0 hat. Die Abstumpfung der Polkanten einer Pyramide zweiter Ordnung $mP\infty$ erfolgt dagegen durch die Flächen einer primären Pyramide $m'P$, wobei $m' = \frac{1}{2} m$, wie die Auflösung der aus den reciproken Ableitungszahlen der Flächen $A_1 B_\infty C_m$, $A_\infty B_1 C_m$ und $A_1 B_1 C_{m'}$ gebildeten Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & \frac{1}{m} \\ 1 & 1 & \frac{1}{m'} \end{vmatrix} = 0$$ ergiebt; es ist darnach nämlich

$$\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0, \text{ also } m = 2m'.$$

Fig. 102 ist die Kombination O ($d_1 = \frac{7}{6}$) und $\frac{\infty O 2}{2}$ ($d_2 = 1$). Die Ecken, welche die Spitzen der kleinen gleichschenkligen Dreiecke bilden, haben die mit Formel 1) zu berechnenden Koordinaten $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{1}{3}$. Die Ecken an der Basis dieser Dreiecke haben die nach Formel 2) zu berechnenden Koordinaten $x = 1$, $z = \frac{1}{6}$.

XI. Kapitel.

Kombinationen an regulären Krystallen.

§ 88. **Zweizählige Kombinationen an holoedrischen Krystallen. Kombinationsecken.** Die Kombinationsecken von zwei holoedrischen, nicht verzerrten regulären Formen $m_1 \, O n_1$ (Centraldistanz $= d_1$) und $m_2 \, O n_2$ (d_2) liegen entweder auf einer oktaedrischen oder auf einer hexaedrischen oder auf einer dodekaedrischen Kante.

Im ersteren Fall werden die Koordinaten derselben nach Formel 1) (§ 86), im zweiten Fall nach Formel 3) berechnet. Die dodekaedrische Kante ist bei der Centraldistanz $d_1 = 1$, bei $m On \; A_1 R'''$ (s. Fig. 35), wobei $OR''' = \frac{m\,n\sqrt{2}}{m+n} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ (R''' ist Schnittpunkt von $B_n \, C_m$ mit $B_m \, C_n$).

Zwei entsprechende Kanten von $m_1 \, On_1$ und $m_2 \, On_2$ schneiden sich daher in Ecken, deren Koordinaten aus folgender Determinante zu berechnen ist:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1} & \frac{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}}{d_1\sqrt{2}} \\ \frac{1}{d_2} & \frac{\frac{1}{n_2}+\frac{1}{m_2}}{d_2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

Man erhält hierbei die Werte

$$5) \quad x = \frac{d_1\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{m_2}\right) - d_2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}\right)}{\left(\frac{1}{n_2}+\frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}\right)}.$$

Die beiden anderen Koordinaten werden aus dem Wert r, der Parallelen zu OR''', durch Division mit $\sqrt{2}$ erhalten (als Seiten des Quadrats, in dem r Diagonale ist),

$$y = z = \frac{d_2 - d_1}{\left(\frac{1}{n_2}-\frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{m_1}\right)}.$$

Beispiele. $4\,O\,2$ (1) mit $O(\frac{5}{4})$ (Fig. 103). Die in Klammern beigefügten Zahlen sollen hier und im Folgenden stets die Centraldistanz bedeuten.

OK: (Abkürzung für Kombinationsecken auf oktaedrischen Kanten nach Formel 1) $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$.

DK: (Abkürzung für Kombinationsecken auf dodekaedrischen Kanten nach Formel 5) $x = \frac{17}{20}$, $y = z = \frac{1}{5}$.

Die Ecken des vorherrschenden Oktaeders werden achtflächig zugespitzt. Fig. 104: $2\,O\,2$ (1), $\infty\,O$ $(\frac{11}{9})$.

OK: $x = \frac{7}{9}$, $y = \frac{4}{9}$.

HK: (Abkürzung für Kombinationsecken auf hexaedrischen Kanten nach Formel 3) $x = y = \frac{11}{18}$, $z = \frac{1}{6}$.

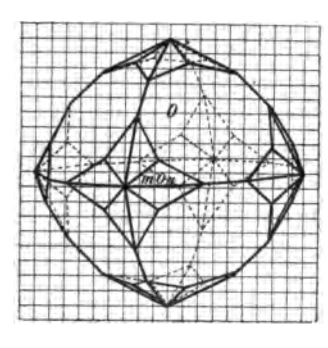


Fig. 103.

Fig. 104.

Das Rhombendodekaeder stumpft die rhombischen Ecken des Ikositetraeders ab (vergl. Fig. 94). Während in den beiden vorstehenden Beispielen zweierlei Kombinationsecken vorhanden sind, zeigen die folgenden Figuren nur eine Art Kombinationsecken.

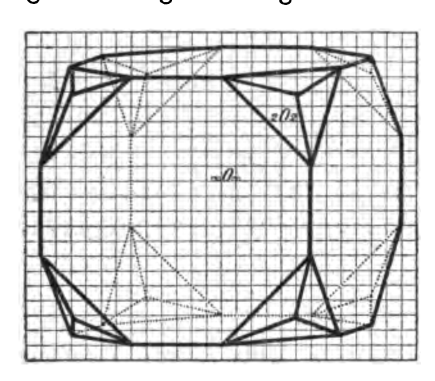


Fig. 105.

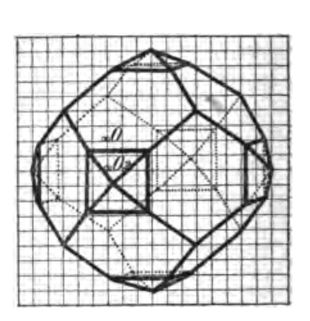


Fig. 106.

Fig. 105: $\infty\,O\,\infty$ (1), $2\,O\,2$ $(\frac{5}{3})$.

HK: $x = y = 1$, $z = \frac{1}{3}$.

Das Ikositetraeder spitzt die Ecken des Würfels zu.

Die trigonale Ecke von $2\,O\,2$ hat die Koordinaten $x = y = z = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3}$.

Fig. 106: ∞O (1), $\infty O 2$ ($\frac{8}{9}$).

DK: $x = \frac{7}{9}, y = z = \frac{2}{9}$.

Der Pyramidenwürfel spitzt die oktaedrischen Ecken des Rhombendodekaeders zu.

Die oktaedrische Ecke hat die Koordinaten $x = 1 . \frac{8}{9}, y = z = 0$.

Fig. 107: O (1), $2 O 2$ ($\frac{8}{9}$).

OK: $x = \frac{7}{9}, y = \frac{2}{9}, z = 0$.

Das Ikositetraeder spitzt die Ecken des Oktaeders zu.

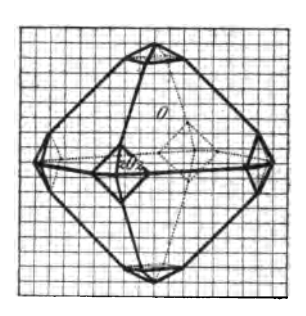


Fig. 107.

§ 89. **Mittelkrystalle.** Fallen zwei Kombinationsecken auf einer Kante zusammen, so entstehen die sog. Mittelkrystalle.

Für die Ecken auf den oktaedrischen Kanten tritt dieser Fall offenbar ein, wenn in Formel 1) die Werte für x und y gleich werden, also die Zähler der gleichnamigen Brüche

$$\frac{d_1}{n_2} - \frac{d_2}{n_1} = d_2 - d_1,$$

mithin bei $d_2 = \frac{d_1\left(1 + \frac{1}{n_2}\right)}{1 + \frac{1}{n_2}}$, also in Fig. 103 bei $d_2 = \frac{4}{3} d_1$, in Fig. 105 bei $d_2 = \frac{3}{2} d_1$ oder $d_1 = \frac{2}{3} d_2$, in Fig. 107 bei $d_2 = \frac{3}{4} d_1$ oder $d_1 = \frac{4}{3} d_2$.

Der Mittelkrystall von Würfel und Ikositetraeder wird erhalten, wenn man die rhombischen Ecken des letzteren unter einander verbindet und die oktaedrischen Kanten weglässt. Der Mittelkrystall von Oktaeder und Ikositetraeder wird gefunden, wenn man dieselben Ecken unter einander verbindet und die hexaedrischen Kanten weglässt. Wird die Centraldistanz des Oktaeders grösser als $\frac{4}{3}$, so stumpft das Oktaeder die trigonalen Ecken des Ikositetraeders ab, und die Kombinationsecken liegen auf den hexaedrischen Kanten.

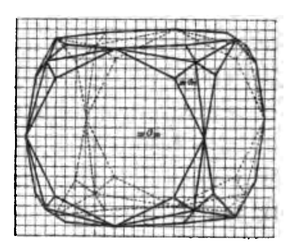


Fig. 108.

Diese letzteren fallen weg, wenn z in Formel 3 (S. 80) gleich 0 wird, was ebenfalls bei $d_2 \left(1 + \frac{1}{n_1}\right) = d_1 \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)$ eintritt.



Dieser Mittelkrystall ist von 32 Dreiecken begrenzt (8 gleichseitig, 24 gleichschenklig).

Fig. 108 zeigt einen Mittelkrystall $\infty O \infty$, $3 O \frac{3}{2}$ ($\frac{5}{8}$).

Die Zahl $\frac{5}{8}$ ergiebt sich aus der Gleichung $d_2 = \frac{d_1 \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)}{1 + \frac{1}{n_1}} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 + 0}$.

HK: $x = y = 1$, $z = 0$.

DK: $x = 1$, $y = z = \frac{2}{3}$.

Ist $d_2 < \frac{d_1 \left(1 + \frac{1}{m}\right)}{1 + \frac{1}{n_1}}$, so ist der Würfel vorherrschend, und seine trigonalen Ecken werden zugespitzt; ist dagegen $d_2 > \frac{d_1 \left(1 + \frac{1}{n_2}\right)}{1 + \frac{1}{n_1}}$, so ist der Achtundvierzigflächner vorherrschend, und seine oktaedrischen Ecken werden abgestumpft.

§ 90. Habitus der holoedrischen regulären Kombinationen. Bestimmung der Centraldistanz. Das Aussehen der regulären Krystalle, ihr „Habitus", hängt hauptsächlich von der vorherrschenden Form ab und ist verschieden bei verschiedenen Mineralien und auch bei demselben Mineral bei verschiedenen Vorkommen und Fundorten. Zur Bezeichnung des Habitus genügt aber nicht die blosse Angabe der an den Kombinationen auftretenden Formen, sondern diese Bezeichnung wird erst vollkommen deutlich, wenn auch noch die Centraldistanz der Formen angegeben wird. Hierbei handelt es sich aber für gewöhnlich nur darum, welche Form die grössere Centraldistanz hat, oder zwischen welchen Grenzwerten dieselbe liegt. So hat z. B. die Kombination O, $\infty O \infty$ oktaedrischen Habitus, wenn für $\infty O \infty$ wie in Fig. 85 $d > \frac{1}{2}$, bei $d = \frac{2}{3}$ sind die Oktaederflächen reguläre Sechsecke. Bei Kobaltnickelkies z. B. ist d stets grösser als $^2/_3$, beim Bleiglanz gewöhnlich kleiner, oft $^1/_2$ (Mittelkrystall, Fig. 86). Bei Flussspat ist der würfelförmige Habitus, der eintritt, wenn die Centraldistanz von O mehr als doppelt so gross ist, wie bei $\infty O \infty$ (Fig. 87) die Regel, der oktaedrische Habitus für wenige Fundorte charakteristisch mit durch ∞O abgestumpften Oktaederkanten (Berner Oberland). Tritt die Kombination $\infty O \infty$, $m O m$ Fig. 105 an Flussspat auf, so ist $m O m$ stets untergeordnet, also $d > \frac{3}{2}$, während es am Analcim vorherrschend ist, d. h. $d < \frac{3}{2}$ (Fassathal) oder auch $d = \frac{3}{2}$ Mittelkrystall (Cyklopeninsel).

Die Grösse der Centraldistanz lässt sich bestimmen, wenn eine Koordinate der Kombinationsecke bekannt ist. Da wo es sich, wie bei Abstumpfungen von

Ecken oder Kanten, um Verkürzung von Kanten handelt, lässt sich eine Koordinate leicht finden. Ist z. B. wie in Fig. 89 eine Dodekaederkante um $\frac{1}{3}$ ihrer Länge verkürzt, so ist die Koordinate $x = \frac{2}{3}$, nämlich $\frac{1}{2}$ (Koordinate der trigonalen Ecke $= x_1$) $+ \frac{1}{3}\left[1 \text{ (Koordinate der Oktaederecke } = x_2) - \frac{1}{2}\right]$ oder $x = x_1 + v\,(x_2 - x_1)$. Ist die Verkürzung $v = \frac{2}{3}$, wie in Fig. 93, so ist die Koordinate $x = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$. Setzt man diese Werte in die Formel 5) § 88, so erhält man $\frac{2}{3} = \frac{1\,(1+1) - d_2\,(1+0)}{(1+1) - (1+0)} = 2 - d_2$, $d_2 = \frac{4}{3}$ oder bei $x = \frac{5}{6}$, $\frac{5}{6} = 2 - d_2$, also $d_2 = \frac{7}{6}$. Ist, wie in Fig. 94, die oktaedrische Kante verkürzt, so bestimmt man eine Koordinate in ähnlicher Weise wie oben und setzt den Wert in Gleichung 1) (§ 86) ein, also hier $\frac{8}{9} = \frac{\frac{1}{1} - \frac{d_2}{2}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{d_2}{2}}{\frac{1}{2}}$ und $d_2 = \frac{10}{9}$. Derselbe Wert wird erhalten, wenn man eine Koordinate auf der hexaedrischen Kante bestimmt; und zwar ist $z = v \,.\, z$, also hier $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$. Setzt man diesen Wert in Gleichnng 3) ein, so erhält man

$$\frac{1}{3} = \frac{d_2\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1\,(1+1)}{0 - \frac{1+1}{2}} = -\,d_2\left(\frac{3}{2}\right) + 2,$$

$$\text{also } d_2 = \frac{2 - \frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{9}.$$

§ 91. **Mehrzählige holoedrische Kombinationen des regulären Systems.** Treten mehrere Formen an demselben Krystall auf, so nennt man die Kombination mehrzählig. Hierbei werden z. B. gleichzeitig Ecken und Kanten abgestumpft, oder die verschiedenen Ecken oder Kanten durch verschiedene Formen abgestumpft, zugeschärft oder zugespitzt. Die Anzahl der Kombinationskanten und Ecken wird dabei oft nicht grösser. Man zeichnet z. B. die Kombination O, ∞O, $\infty O \infty$, indem man bei Fig. 88 die Kombinationsecken statt mit der trigonalen Ecke, wie in Fig 93, direkt unter einander verbindet. Die Kombination hat nur eine Art Ecken. Die gleiche Form wird durch Verbindung von Fig. 89 und 92 erhalten, nur ist der Habitus mehr würfelartig. Verbindet man bei Fig. 94 oder 104 die Kombinationsecken auf den oktaedrischen Kanten und ebenso die auf den hexaedrischen Kanten unter sich, so erhält man die vierzählige Kombination ∞O, $2O2$, $\infty O \infty$, O.

In vielen Fällen wird eine Kombination bei Hinzutreten einer weiteren Form in der Weise verändert, dass eine schiefe Ab-

stumpfung der Kombinationskanten entsteht. Eine Kante heisst schief oder unsymmetrisch abgestumpft, wenn die an ihrer Stelle erscheinende Fläche mit den anstossenden Flächen verschiedene Winkel bildet. In Fig. 109 z. B. stumpfen die Flächen von $2\,O\,2$ (1) die Kombinationskanten von O ($\frac{5}{4}$) und $\infty\,O\,\infty$ ($\frac{3}{4}$) schief ab (Bleiglanz).

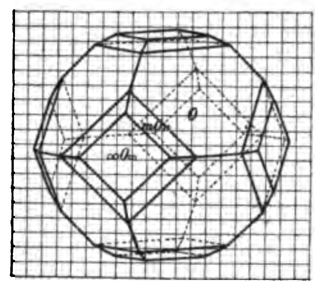


Fig. 109.

Eine ähnliche Form erhält man durch Abstumpfung der oktaedrischen Ecken in der Kombination O, $2\,O\,2$ Fig. 107 oder der trigonalen Ecke von $\infty\,O\,\infty$, $2\,O\,2$ in Fig. 105 (Flussspat von Stolberg), doch mit verschiedenem Habitus. Die Kombinationskanten von $2\,O\,2$, $\infty\,O$ (Fig. 94) werden durch ein Hexakisoktaeder $m\,O\,\frac{m}{m-1}$, also z. B. $3\,O\,{}^3/_2$ schief abgestumpft (Granat). Die Kombinationskanten bei O, $\infty\,O$ (Fig. 93) werden durch Pyramidenoktaeder $m\,O$ schief abgestumpft (Bleiglanz von Neudorf).

§ 92. **Bestimmung der Ableitungszahlen aus den Zonen.**

Bei mehrzähligen Kombinationen lassen sich die Symbole der Flächen häufig aus den Zonen ableiten. Man kann zwar aus der Zahl und Lage der Flächen leicht sehen, ob man Flächen vom Oktaeder, Würfel oder Rhombendodekaeder vor sich hat, kann auch wohl erkennen, ob die Flächen einem Ikositetraeder, Pyramidenwürfel oder Achtundvierzigflächner zugehören, kann aber nicht sehen, welchen speziellen Wert in diesen Fällen m und n haben. Liegt nun eine Fläche mit zwei bekannten Flächen in derselben Zone (ist „tautozonal“), so ist durch die Determinante aus den reciproken Ableitungszahlen der drei Flächen eine Gleichung (Zonengleichung § 84) gegeben, aus der sich eine Unbekannte, die darin vorkommt, bestimmen lässt. Nehmen wir aber z. B. die drei Flächen $A_1\,B_\infty\,C_\infty$, $A_1\,B_1\,C_1$ und $A_1\,B_m\,C_m$ in Fig. 109, welche tautozonal sind, so wird die Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{vmatrix}$ bei jedem Wert von m gleich 0, und man erhält gar keine Bestimmungsgleichung. Jedes beliebige Ikositetraeder $m\,O\,m$ stumpft die Kombinationskante zwischen O und $\infty\,O\,\infty$ ab. Nehmen wir dagegen den in § 84 besprochenen Fall der Abstumpfung der Kanten von $\infty\,O$, so sehen wir, dass unter Umständen auch das Symbol einer Fläche aus einer Zone sich berechnen lässt. Stets ist dies aber der Fall, wenn eine Fläche zugleich in **zwei** Zonen liegt. Bezeichnen wir die letzte der drei oben genannten Flächen allgemein als $A_1\,B_n\,C_m$, so giebt die Determinante die eine Gleichung $m = n$, so dass noch eine weitere Gleichung zur Bestimmung des Axenverhältnisses der Form genügt.

In Fig. 110 erkennt man leicht als vorherrschende Formen das Oktaeder (P, P') und das die Kanten desselben abstumpfenden Dodekaeder ∞O (m, m'). Ebenso ergiebt sich schon aus Lage und Zahl der Flächen, dass γ und γ' einem Pyramidenwürfel $\infty O n$ und β und β' einem Ikositetraeder $m O m$ angehören und ε und ε' einem Hexakisoktaeder $m O n$. Da γ mit m' und P' in einer Zone liegt,

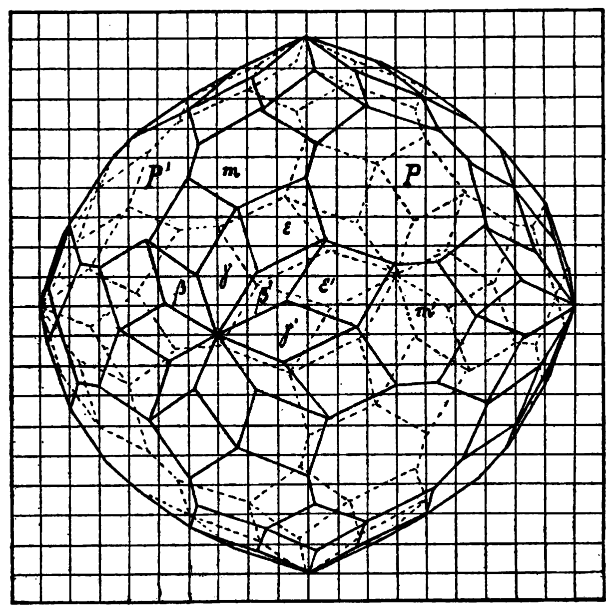


Fig. 110.

so ergiebt sich für die 3 Flächen $A_1 B_\infty C_n$, $A_1 B_1 C_\infty$ und $A_1 B_{-1} C_1$ die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{n} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ mithin die Gleichung}$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

also $n = 2$.

Der Wert von m in $m O m$ wird, da β' mit denselben Flächen in einer Zone liegt, aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ also der Gleichung}$$

$$1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} - \frac{1}{m} = 0$$

bestimmt, und zwar ist $m = 3$.

Die Fläche $\varepsilon = A_1 B_m C_n$ stellt den allgemeinsten Fall dar, sie liegt in zwei Zonen, mit $P = A_1 B_1 C_1$ und $\gamma = A_1 B_\infty C_2$ und mit $m = A_1 B_\infty C_1$ und $\beta' = A_1 B_3 C_3$. Dadurch ergeben sich die beiden Determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{m} & \frac{1}{n} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = 0,$$

also die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2m} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2m}$$

$$\text{und} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{3m} + \frac{1}{m} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{n} = 1 - \frac{2}{m};$$

daher ist $\frac{1}{2} + \frac{1}{2m} = 1 - \frac{2}{m}$, folglich $m = 5$ und $n = \frac{5}{3}$.

Darnach ist Fig. 110 die Kombination

$$O, \ \infty O, \ \infty O2, \ 3O3, \ 5O\tfrac{5}{3}.$$

Die Centraldistanz der Flächen ist auf die Zonen ohne Einfluss, muss jedoch vor Anfertigung der Zeichnung bekannt sein, weil sich darnach die Lage der Eckpunkte richtet. In der vorliegenden Figur handelt es sich nur um die Lage der 4 Ecken von ε'. Die in die Hauptsymmetrieebenen fallenden Punkte haben, wie bei den in die Ebene BC fallenden Punkten direkt abzuzählen ist, die Koordinaten $x = \frac{7}{9}$, $y = \frac{4}{9}$, $z = 0$, d. h. für ∞O ist die Centraldistanz $\frac{11}{9}$ (§ 86. 1) und für $5O^5/_3 = \frac{47}{45}$.

Zur Berechnung der Koordinaten der in die gewöhnlichen Symmetrieebenen fallenden Ecke dient die Formel 5 (§ 88) für den Schnittpunkt einer Fläche von $3O3$ (1) und zwei Flächen von $5O^5/_3$ $\left(\frac{47}{45}\right)$. Darnach ist $x = \frac{7}{9}$, $y = z = \frac{1}{3}$. Dieselbe Formel dient dann auch zur Berechnung der Centraldistanz von O. Nach der Gleichung ist $\frac{1}{3} = \frac{d_2 - 1}{2 - {}^2/_3}$, also $d_2 = \frac{13}{9}$. Vollständig würde demnach die Kombination bezeichnet werden als:

$$O\left(\frac{13}{9}\right), \ \infty O\left(\frac{11}{9}\right), \ \infty O2\,(1), \ 3O3\,(1), \ 5O^5/_3\left(\frac{47}{45}\right).$$

Die Koordinaten des Schnittpunktes von $\beta'\ \gamma'\ \varepsilon'$ werden nach § 80 aus der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{vmatrix} \quad \text{und den Werten } d_1 = 1,\ d_2 = 1,\ d_3 = \frac{47}{45}$$

bestimmt: $x = \frac{8}{9}$, $y = \frac{2}{9}$, $z = \frac{1}{9}$.

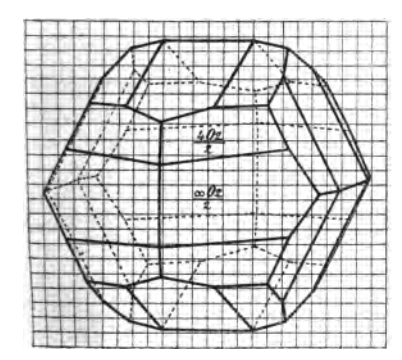
Die Koordinaten des Schnittpunktes von ε', m' und P erhält man aus der Determinante

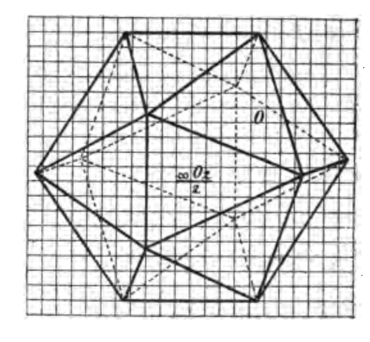
$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und den Werten } d_1 = \frac{47}{45},\ d_2 = \frac{11}{9},\ d_3 = \frac{13}{9}$$

und zwar: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{5}{9}$, $z = \frac{2}{9}$.

Durch Vornahme aller möglichen Vertauschungen erhält man alle übrigen Ecken der Form. Setzt man in allen Fällen $x = 0$, so erhält man ein **Projektionsbild** auf die Ebene BC, in dem sämtliche Ecken mit Ecken der Quadrate zusammenfallen.

§ 93. **Pentagonal-hemiedrische Kombinationen.** Der pentagonal-hemiedrische Habitus tritt in Kombinationen nur dann hervor, wenn Dyakisdodekaeder und Pentagondodekaeder mit einander (Fig. 111) oder mit anderen Formen zusammen vorkommen (Fig. 102). In diesen Kombinationen ist häufig der Würfel vorherrschend, dessen Kanten durch die Pentagondodekaederflächen schief abgestumpft werden, und dessen Ecken die Dyakisdodekaeder $\frac{n^2 O n}{2}$ z. B. $\frac{4 O 2}{2}$ mit 3 Trapezen, die übrigen Dyakisdodekaeder mit 3 Trapezoiden zuspitzen.


Fig. 111.


Fig. 112.

Die häufig sichtbare Streifung der Würfelflächen (Eisenkies) hängt mit dem Auftreten der Pentagondodekaederflächen zusammen, die in sehr schmalen Streifen mit den Würfelflächen abwechseln („oscillatorisch"). Ist das Oktaeder vorherrschend, so werden die Ecken desselben durch die Pentagondodekaederflächen zugeschärft (Fig. 102), wobei die an ihre Stelle tretenden Kanten häufig durch Würfelflächen abgestumpft werden. In Kombination mit einem Dyakisdodekaeder werden die Ecken durch ungleichseitige Dreiecke zugespitzt. Durch direkte Verbindung der pentagonalen Ecken unter einander erhält man den Mittelkrystall $\infty O 2$ (1), O ($\frac{3}{2}$) Fig. 112. Herrscht das Pentagondodekaeder vor, so werden die durch die oktaedrischen Ecken gehenden Kanten durch den Würfel abgestumpft, durch Pentagondodekaeder (mit grösserem n) zugeschärft. Die trigonalen Ecken werden durch O abgestumpft, die pentagonalen Ecken durch ∞O, wenn der Winkel der beiden an

derselben Kante abstumpfenden Flächen 90° beträgt, durch $\infty O n$ (mit kleinerem n), wenn dieser Winkel kleiner als 90°, durch ein Pentagondodekaeder in verwendeter Stellung meist $-\frac{\infty O 2}{2}$, wenn der Winkel grösser ist als 90°. Die trigonalen Ecken werden häufig dreiflächig zugespitzt. Fügt man in Fig. 111 noch 8 trigonale Ecken mit den Koordinaten $x = y = z = \frac{7}{12}$ bei und verbindet jede mit den drei benachbarten pentagonalen Ecken, so erhält man die Kombination $\frac{\infty O 2}{2}$ (1) $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ $(\frac{7}{6})$ als Mittelkrystall der beiden Formen. Bei grösserer Centraldistanz werden die mittleren pentagonalen Kanten mehr oder weniger verkürzt. Die Zuspitzungsflächen sind gleichschenklige Dreiecke. Eine ähnliche Zuspitzung ist für $\frac{\infty O 2}{2}$ durch jedes Dyakisdodekaeder $\frac{m O \frac{2m}{m+1}}{2}$ möglich.

Die Bedingung dafür ist die, dass die eine Koordinate der pentagonalen Ecke des Dyakisdodekaeders zu der anderen in demselben Verhältnis steht, wie die Koordinaten der Ecken des Pentagondodekaeders zu einander stehen, also bei $\frac{\infty O 2}{2}$ im Verhältnis $1 : 2 = \frac{m(n-1)}{mn-1} : \frac{n(m-1)}{mn-1}$, daher $n = \frac{2m}{m+1}$. Bei $\frac{\infty O 3}{2}$ würde die Zuspitzung in dieser Weise durch $\frac{4 O 2}{2}$ erfolgen. Für jedes $\frac{\infty O n_1}{2}$ durch $\frac{m O n}{2}$, wenn die Bedingung

$$(n_1 - 1) : n_1 = m(n-1) : n(m-1)$$

erfüllt ist, also wenn

$$n_1 = \frac{n(m-1)}{m-n}.$$

In anderen Fällen sind die Zuspitzungsflächen Trapeze ($\frac{4 O 2}{2}$ Fig. 111) oder Trapezoide ($2 O 2$). Das erstere ist dann der Fall, wenn die mittleren Kanten zu den längeren parallel sind, also wenn $n^2 = m$.

In Fig. 111 ist der Dyakisdodekaeder $\frac{4 O 2}{2}$ die vorherrschende Form und die längeren pentagonalen Kanten desselben sind durch die Flächen von $\frac{\infty O 2}{2}$ abgestumpft. Während bei den vorhergehenden Kombinationen die Centraldistanz einer der Formen gleich 1 gewählt wurde, ist hier, um einen allgemeinen Fall darzustellen, die Centraldistanz in beiden Fällen > 1 gewählt und zwar für $\frac{4 O 2}{2}$ $d_1 = 7/6$, für $\frac{\infty O 2}{2}$ $d_2 = \frac{13}{12}$.

Die trigonale Ecke bekommt hierbei die Koordinaten

$$x = y = z = \frac{4}{7} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{3}.$$

Von den Ecken einer Fläche von $\frac{\infty O 2}{2}$ sind zwei die Schnittpunkte zweier kürzeren pentagonalen Kanten und werden mit Formel 2 (§ 86) bestimmt: $x = \frac{13}{12}$, $z = \frac{1}{3}$; eine Ecke ist der Schnittpunkt einer kürzeren und einer längeren pentagonalen Kante von $A_{d_1 m_1} B_{d_1}$ mit $A_{d_2} B_{d_2 n_2}$.

Aus $\begin{vmatrix} \frac{1}{d_1 m_1} & \frac{1}{d_1} \\ \frac{1}{d_2} & \frac{1}{d_2 n_2} \end{vmatrix}$ ergiebt sich dann

$$6)\ x = \frac{\frac{1}{d_2 n_2} - \frac{1}{d_1}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_2 m_1} - \frac{1}{d_1 d_2}} = \frac{\frac{d_1}{n_2} - d_2}{\frac{1}{n_2 m_1} - 1} = \frac{4}{7},$$

$$y = \frac{\frac{1}{d_1 m_1} - \frac{1}{d_2}}{\frac{1}{d_1 d_2 n_2 m_1} - \frac{1}{d_1 d_2}} = \frac{\frac{d_2}{m_1} - d_1}{\frac{1}{n_2 m_1} - 1} = \frac{43}{42}.$$

Die beiden anderen Ecken liegen auf den mittleren pentagonalen Kanten und sind ihre Koordinaten mit Hilfe der allgemein für den Schnittpunkt dreier Flächen gegebenen Formeln (§ 80) zu berechnen. Der Schnittpunkt von $A_1 B_1 C_\infty$, $A_1 B_2 C_4$ und $A_4 B_1 C_2$ hat darnach die aus $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ und den Werten $d_1 = \frac{13}{12}$, $d_2 = \frac{7}{6}$, $d_3 = \frac{7}{6}$ zu bestimmenden Werte $x = \frac{2}{3}$ (wie bei der trigonalen Ecke), $y = \frac{5}{6}$, $z = \frac{1}{3}$ (wie bei dem Schnittpunkt auf den kürzeren pentagonalen Kanten).

§ 94. **Tetraedrisch-hemiedrische Kombinationen.** Tetraedrisch-hemiedrische Kombinationen unterscheiden sich von den holoedrischen dadurch, dass statt Hexakisoktaeder Hexakistetraeder, statt Ikositetraeder Trigondodekaeder, statt Triakisoktaeder Deltoiddodekaeder und statt Oktaeder Tetraeder auftreten, während Pyramidenwürfel, Rhombendodekaeder und Würfel gerade so auftreten, wie in holoedrischen Kombinationen. Eine Kombination der beiden letzteren Formen wäre demnach als hemiedrisch gar nicht zu erkennen,

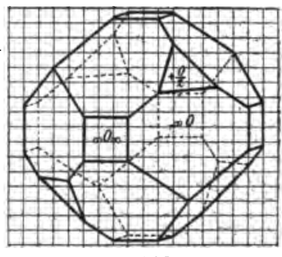


Fig. 113.

wenn nicht etwa, wie in Fig. 113 nur die Hälfte der trigonalen Ecken abgestumpft wären (vergl. Fig. 89). In ähnlicher Weise würde

$\frac{2\,O\,2}{2}$ nur 12 Kanten abstumpfen, $\frac{3\,O\frac{3}{2}}{2}$ ebensoviele zuschärfen, $\frac{m\,O}{2}$ nur vier abwechselnde Ecken zuspitzen.

Am deutlichsten tritt der tetraedrisch-hemiedrische Habitus hervor, wenn die vier oben genannten Halbflächner allein in den Kombinationen auftreten, oder doch vorherrschen. Die Kombinationsecken liegen dann entweder auch auf den dodekaedrischen Kanten (Formel 5) oder den (verlängerten) hexaedrischen Kanten (Formel 3) oder auch auf den tetraedrischen Kanten.

In einer solchen Kante schneiden sich beispielsweise die Flächen $A_1\,B_n\,C_m$ und $A_1\,B_{-m}\,C_{-n}$. Diese Kante führt also von A_1 nach dem Schnittpunkt von $B_n\,C_m$ und $B_{-m}\,C_{-n}$, der auf der rhombischen Zwischenaxe liegt und die aus

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{m} & \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{n} \end{matrix}\right| \text{ abzuleitenden Werte}$$

$$y = -z = \frac{-\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}} = \frac{1}{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}$$

hat. Der Schnittpunkt zweier tetraedischer Kanten würde mit Berücksichtigung verschiedener Centraldistanzen die aus

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{d_1} & \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}}{d_1\sqrt{2}} \\ \frac{1}{d_2} & \frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}}{d_2\sqrt{2}} \end{matrix}\right| \text{ zu berechnenden Werte}$$

$$7)\quad x = \frac{\frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}}{d_2\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}}{d_1\sqrt{2}}}{\frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}}{d_1 d_2\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}}{d_1 d_2\sqrt{2}}} = \frac{d_1\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right) - d_2\left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)}{\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)}$$

$$y = z = \frac{\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}}{\frac{\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}}{d_1 d_2} - \frac{\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}}{d_1 d_2}} = \frac{d_2 - d_1}{\left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{m_2}\right) - \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{m_1}\right)}$$

haben.

Die folgenden Zeichnungen stellen die gewöhnlichsten Kombinationen mit vorherrschendem Tetraeder dar.

Fig. 114 zeigt das Tetraeder $+\frac{O}{2}$ mit durch das Gegentetraeder $-\frac{O}{2}$ in der Centraldistanz 2 abgestumpften Ecken. Die Form

würde ebenso gut ein verzerrtes Oktaeder darstellen, falls nicht etwa die Flächen $-\frac{O}{2}$ durch andere Beschaffenheit, etwa Rauheit oder Glanz, sich von den Flächen $+\frac{O}{2}$ unterschieden. Die Kanten von $\frac{O}{2}$ sind von den Ecken aus in gleichem Verhältnis (auf $\frac{1}{2}$) verkürzt.

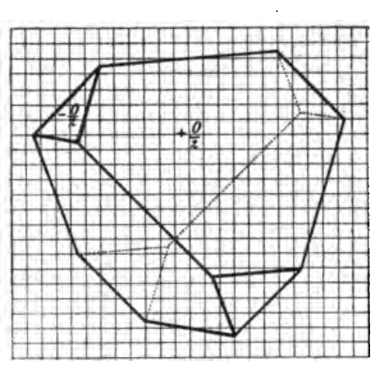
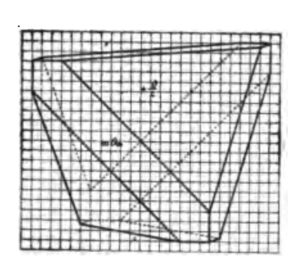


Fig. 114.

Fig. 115 zeigt die Kombination $\infty O \infty$ (1) mit $+\frac{O}{2}$ ($\frac{4}{3}$). Der Würfel stumpft die Kanten des Tetraeders ab, seine Kanten sind durch das Tetraeder auf $\frac{1}{6}$ verkürzt.

Fig. 116 ist die Kombination $+\frac{2\,O\,2}{2}$ (1) mit $+\frac{O}{2}$ ($\frac{5}{4}$). Das Pyramidentetraeder schärft die Kanten des Tetraeders zu. Das letztere stumpft die trigonalen Ecken des ersteren ab und verkürzt seine hexaedrischen Kanten auf die Hälfte.

Die Koordinate z wird dabei $= -\frac{1}{4}$, nämlich $\frac{\frac{1}{2} + (-1)}{2}$. Setzt man diesen Wert in Formel 3 (§ 86) ein, so erhält man den Wert für $d_2 = {}^5/_4$. Bei Fig. 115 ist $z = -\frac{2}{3}$ und deshalb $d_2 = \frac{4}{3}$.


Fig. 115.

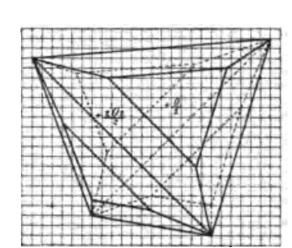

Fig. 116.

Fig. 117 ist die Kombination ∞O (1) mit $+\frac{O}{2}$ $\left(\frac{2}{3}\right)$. Das Rhombendodekaeder spitzt die Ecken des Tetraeders dreiflächig zu. Dasselbe würde durch Deltoiddodekaeder $-\frac{mO}{2}$ geschehen, doch wären die Winkel andere.

Die Kombinationsecken auf den Tetraederkanten haben die Koordinaten TK: nach Formel 7) $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$. Die Kanten des Dodekaeders sind auf $\frac{1}{3}$ verkürzt.

Fig. 118 ist ein Beispiel einer mehrzähligen Kombination, nämlich $+\frac{2O2}{2}$ (1), $\infty O\left(\frac{3}{2}\right)$, $\frac{{}^3\!/_2 O}{2}\left(\frac{23}{18}\right)$. Dass das Trigondodekaeder $\frac{2O2}{2}$ ist, sieht man daran, dass es zu den Dodekaederflächen parallele Kombinationskanten hat, also tautozonal ist. Dasselbe gilt für $\frac{2O2}{2}$ und das seine Kanten abstumpfende Deltoiddodekaeder.

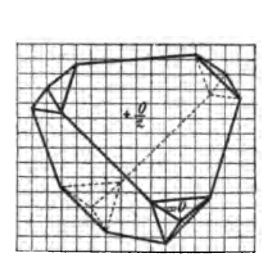


Fig. 117.

Fig. 118.

Die Flächen $A_1 B_2 C_2$, $A_2 B_1 C_2$ und $A_1 B_1 C_m$ liegen in einer Zone, folglich ist

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{m} \end{vmatrix} = 0, \text{ also } \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

und $m = \frac{3}{2}$.

Die trigonalen Ecken der Kombination haben die Koordinaten: $x = y = z = \frac{23}{18} \cdot \frac{3}{8} = \frac{23}{48}$, die tetraedrischen $x = y = -z = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

TK: $x = 1$, $y = -z = \frac{1}{2}$; DK: $x = \frac{7}{12}$, $y = z = \frac{5}{12}$.

Die 24 übrigen Ecken sind solche, in denen von jeder der 3 Formen je eine Fläche auftritt, beispielsweise $A_1 B_2 C_2$, $A_1 B_1 C_\infty$ und $A_1 B_1 C_{3/2}$; sie haben die nach der allgemeinen Formel (§ 80) berechneten Koordinaten $x = \frac{5}{6}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = \frac{1}{3}$. Würde man diese drei Werte auf alle Arten umstellen, so würde man die Koordinaten von 48 Ecken erhalten, von diesen kommen jedoch

nur die 24 Ecken in der Figur vor, welche in die Oktanten fallen, welche man als negativ bezeichnen kann; das Produkt aus den drei Werten muss immer negativ bleiben. Ebenso müssen die Umstellungen für die übrigen Ecken immer nur so gemacht werden, dass das Produkt sein Vorzeichen behält, also für die trigonalen Ecken und die Kombinationsecken auf den dodekaedrischen Kanten positiv, für die übrigen negativ ist.

Für eine flächenreichere Kombination (Fahlerz von Dillenburg, Naumann-Zirkel, Mineralogie, Fig. 9) möge hier statt Zeichnung nur die Anweisung dazu folgen: $l = \frac{2\,O\,2}{2}\left(\frac{35}{36}\right)$, $f = \infty O \infty \left(\frac{5}{6}\right)$, $o = \infty O \left(\frac{7}{5}\right)$, $r = -\frac{2\,O\,2}{2}\left(\frac{4}{3}\right)$, $s = \infty O 3$ (1). Zur Bezeichnung der Ecken genügt die Angabe von drei in denselben zusammenstossenden Flächen, zur Bezeichnung der Kanten die Nebeneinanderstellung der zwei zu verbindenden Ecken:

Ecken	x	y	z	Anzahl
1) $r.r.r$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	4
2) $r\,r\,o$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{17}{30}$	12
3) $r\,o\,s$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{15}$	24
4) $s\,o\,l$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{23}{90}$	24
5) $s\,s\,r$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	12
6) $s\,l\,f$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	24
7) $l\,l\,o$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{7}{45}$	12
8) $l\,l\,l$	$\frac{35}{72}$	$\frac{35}{72}$	$-\frac{35}{72}$	4

Kanten $rrr - rro$ also 1 — 2, ferner 2 — 3, 3 — 4, 3 — 5, 4 — 6, 5 — 6, 4 — 7, 7 — 8, 6 — 6 (Verbindung der gleichen Ecken in gegenüberliegenden Oktanten). Im ganzen 116 Ecken und 180 Kanten bei 66 Flächen ($e + f = k + 2$). Es empfiehlt sich, die Ecken bei dem Aufsuchen gleich wie oben zu nummerieren. Die Figur stellt den Krystall um 90° verdreht dar, weil dabei die meisten Flächen gut sichtbar werden. Bei anderer Stellung sind sämtliche Vorzeichen umzukehren.

XII. Kapitel.

Kombinationen an hexagonalen Krystallen.

§ 95. Holoedrische Formen. Der Habitus der hexagonalen Krystalle ist pyramidal oder prismatisch, d. h. säulen- und nadelförmig oder tafelartig, je nachdem Pyramiden oder Prismen oder die Flächen des basischen Pinakoides vorherrschen, welches letztere dann der Fall ist, wenn die Centraldistanz dieser Flächen gegenüber der der anderen Formen sehr klein ist.

Die Kombinationsecken fallen entweder in den basischen oder einen primären oder sekundären Hauptschnitt und sind dann mit Hilfe der Formeln 1, 2 und 3 (§ 86) zu berechnen (wobei der in den Determinanten ursprünglich vorkommende, bei den Koordinaten selbst aber wegfallende Faktor $\sqrt{2}$ wegen des Winkels von 60° durch $\sqrt{3}$ zu ersetzen ist), oder es sind Zwischenecken, welche mit Hilfe der allgemeinen Formel (§ 80) berechnet werden, wobei die Bezeichnung der Flächen wie in den übrigen Systemen durch nur drei Axenabschnitte genügt.

Eine Linie, die bei der Auswahl von zwei Axen als $A_1\,B_n$ bezeichnet wird, ist bei Vertauschung einer Axe mit der dritten als $A_1\,B_s$ oder als $A_n\,B_s$ zu bezeichnen und dementsprechend ändern sich die Werte der Koordinaten der Schnittpunkte. Sind diese bei der ersten Auswahl der Axen x und y, so sind die Werte im zweiten Fall $x_1 = x + y$, $y_1 = -y$, im dritten Fall $x_2 = x + y$, $y_2 = x$. Es hat z. B. in Fig. 120 der Schnittpunkt von o^2, s' und q' die Koordinaten $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{1}{5}$ oder $x_1 = \frac{4}{5}$, $y_1 = \frac{1}{5}$ oder $x_2 = \frac{4}{5}$, $y_2 = \frac{3}{5}$, je nach Wahl der Axen.

Eine grosse Mannigfaltigkeit in den Formen entsteht dadurch, dass für jedes Mineral das Verhältnis $a:c$ einen besonderen Wert hat, also bei verschiedenen hexagonal krystallisierten Mineralien im allgemeinen verschieden ist. Ist es für zwei Mineralien von verschiedener Zusammensetzung gleich, so nennt man die Mineralien isomorph, gleichgestaltet. Da das Verhältnis $a:c$ stets irrational ist, so lässt sich die Länge der Axen durch Messen nicht absolut genau, wohl aber beliebig genau angeben.

Bei den Kombinationen ist wie bei den einfachen Formen stets die Länge der Zwischenaxe $= 1$ ($= 9$ Quadratseiten) gesetzt und demnach $a_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($= 10{,}4$ Quadratseiten), und $c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,c$.

In Fig. 119 ist eine flächenreiche Kombination am **Beryll** dargestellt und zwar $m = \infty P(1)$, $o^2 = 2P\left(\frac{37}{20}\right)$, $o = P(3)$, $c = oP\left(\frac{18}{5}\right)$, $q = 2P2\left(\frac{35}{20}\right)$, $s = 3P\frac{3}{2}\left(\frac{43}{30}\right)$. Das durch Winkelmessung bestimmte Verhältnis $a:c$ ist $1:0{,}4999$.

Setzt man, wie dies in der Figur geschehen ist, die Länge der Hauptaxe gleich 5, so würde das Verhältnis $a:c = 10{,}4:5 = 1:0{,}481$, was eine Differenz ergiebt, welche kleiner ist, als die beim Zeichnen ohnehin gemachten Fehler. Die Lage der Ecken ergiebt sich aus der folgenden Zusammenstellung, die Flächen sind mit Buchstaben, wie in der in Fig. 120 dargestellten Normalprojektion bezeichnet.

Fig. 119.

Ecken	x	y	z
$c\,o\,o'$	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{13}{5}$
$o\,o'\,q'$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
$q'\,s\,s'$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{19}{10}$
$q'\,s'\,o^2$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{21}{10}$
$q'\,o\,o^2$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{23}{10}$
$o^2\,s'\,m$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{17}{10}$
$s\,s'\,m$	0	1	$\frac{13}{10}$

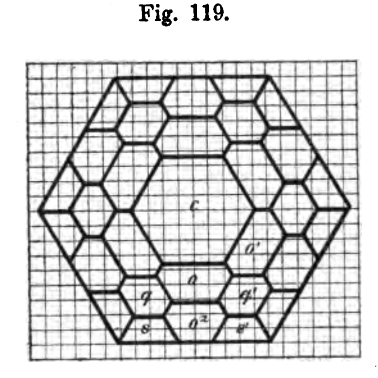


Fig. 120.

Bei der **Normalprojektion** hexagonaler Krystalle kommt das Verhältnis $a:c$ nicht in Betracht. Die Prismenflächen projicieren sich als gerade Linien, die parallelen Kanten bleiben auch in der Projektion parallel, so dass das Kennzeichen der Zonen erhalten bleibt. In dem gewählten Beispiel liegt jede Fläche in zwei oder drei Zonen, weshalb sich aus dem Axenverhältnis einer der Pyramidenflächen die Bezeichnung aller übrigen Formen berechnen lässt.

§ 96. **Pyramidal-hemiedrische hexagonale Formen.** Der pyramidal-hemiedrische Charakter einer Form tritt nur dann hervor, wenn Pyramiden oder Prismen der Zwischenstellung daran

auftreten. Als Beispiel möge die am **Apatit** beobachtete Kombination Fig. 121 dienen: $P = oP\left(\frac{6}{5}\right)$, $a = P2\left(\frac{5}{3}\right)$, $x = P\left(\frac{17}{10}\right)$,

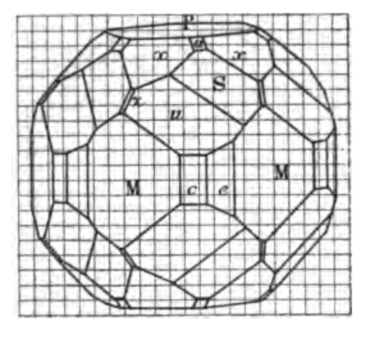


Fig. 121.

$$s = 2P2\left(\frac{10}{9}\right),\ u = 3P\tfrac{3}{2}(1),$$
$$z = 2P\left(\frac{13}{10}\right),\quad e = \infty P2\left(\frac{11}{12}\right),$$
$$c = \infty P\tfrac{3}{2}\left(\frac{25}{27}\right),\ M = \infty P(1).$$

Die Wahl einzelner Buchstaben zur Bezeichnung bestimmter Flächen an Stelle des Symbols in Zeichnungen ist allgemein üblich, doch werden von verschiedenen Forschern verschiedene Buchstaben gewählt (Fig. 120 nach Groth, Fig. 121 nach Naumann u. a.). Die Bezeichnung der Ecken wird dadurch sehr erleichtert. Bei der Berechnung der Koordinaten derselben empfiehlt es sich, eine Reihenfolge zu wählen, wie im folgenden, in welchem Fall man unter die Determinante aus den reciproken Ableitungszahlen der drei ersten Flächen meistens nur die aus den reciproken Ableitungszahlen der folgenden Fläche gebildete Reihe zuzusetzen hat, dann die nächste u. s. w.

	Ecken	x	y	z
1.	$P\,a\,x$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{6}{5}$
2.	$a\,x\,s$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{53}{90}$	$\frac{10}{9}$
3.	$x\,s\,z$	$-\frac{17}{45}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$
4.	$s\,z\,M$	$-\frac{17}{45}$	1	$\frac{3}{5}$
5.	$s\,M\,u$	$-\frac{2}{9}$	1	$\frac{4}{9}$
6.	$M\,u\,e$	$-\frac{1}{6}$	1	$\frac{1}{3}$
7.	$u\,e\,c$	$\frac{1}{18}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{9}$
8.	$c\,u\,M_1$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{9}$
9.	$u\,M_1\,z_1$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
10.	$u\,z_1\,x_1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$
11.	$u\,x_1\,s$	$\frac{28}{90}$	$\frac{47}{90}$	$\frac{88}{90}$
12.	$x_1\,s\,a$	$\frac{1}{15}$	$\frac{47}{90}$	$\frac{10}{9}$
13.	$x_1\,a\,P$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{30}$	$\frac{6}{5}$

In Fig. 121 sind nur die von vornsichtbaren Punkte und Kanten gezeichnet. Auch bei dieser Kombination ergeben sich die Symbole aller Formen aus dem Zonenverband, wenn eine der Pyramidenflächen bekannt ist. Das Prisma dritter Ordnung stumpft die Kombinationskante zwischen den Prismen erster und zweiter Ordnung schief ab, bildet dagegen mit $u = \frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ horizontale Kombinationskanten, hat also ebenfalls $n = \frac{3}{2}$ und ist $\frac{\infty P\frac{3}{2}}{2}$.

§ 97. **Skalenoedrisch-rhomboedrische Formen.** Unter den Kombinationen von Skalenodern mit Rhomboedern haben besonderes Interesse diejenigen, bei welchen die Kanten von Rhomboedern

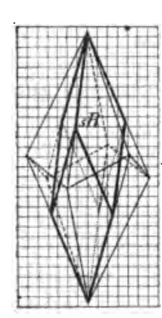


Fig. 122.

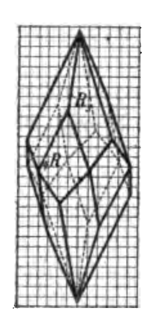


Fig. 123.

durch die Flächen von Skalenoedern zugeschärft werden. Es schärft jedes Skalenoeder die Mittelkanten seines „Rhomboeders der Mittelkanten“ zu, für welches $m_1 = \frac{m(2-n)}{n}$ gefunden wurde (§ 60, Fig. 58). Ausserdem schärft jedes Skalenoeder noch die Polkanten von zwei Rhomboedern zu, welche man als „Rhomboeder der längeren und der kürzeren Polkanten“ zu bezeichnen pflegt.

Das Zeichen des Rhomboeders der längeren Polkanten, Fig. 121, lässt sich mit der aus den reciproken Ableitungszahlen von $A_1 B_n C_m$, $A_n B_1 C_m$ und $A_1 B_\infty C_m$, den in einer solchen Kante zusammenstossenden Flächen, gebildeten Determinante als Zonengleichung berechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \frac{1}{m} \\ \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{m} \\ 1 & 0 & \frac{1}{m_1} \end{vmatrix} = 0 = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_1 n^2} + \frac{1}{mn} - \frac{1}{m};$$

darnach ist $\frac{1}{m_1}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ und $m_1 = m\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, also bei

$\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ ist $m_1 = 5$; es ist daher $-5R$ das Rhomboeder der längeren Polkanten von $R_3 = \frac{3P\frac{3}{2}}{2}$.

In einer kürzeren Polkante des Skalenoeders (Fig. 123) stossen z. B. die Flächen $A_n B_1 C_m$, $A_{-n} B_{\frac{n}{n-1}} C_m$ und $A_1 B_1 C_{m_1}$ zusammen. Daher:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n} & 1 & \frac{1}{m} \\ -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{m} \\ 1 & 1 & \frac{1}{m_1} \end{vmatrix} = 0.$$ Die Auflösung der Gleichung ergiebt

$m_1 = \frac{m(2n-1)}{n}$, also ist z. B. $4R$ das Rhomboeder der kürzeren Kanten von $R_3 = \frac{3P\frac{3}{2}}{2}$.

Die Längen der Hauptaxen der drei einem Skalenoeder einzuschreibenden Rhomboeder verhalten sich wie

$$2-n : 2n-1 : n+1$$

d. h.: Die Hauptaxe des Rhomboeders der längeren Polkanten ist so gross wie die beiden Hauptaxen der Rhomboeder der kürzeren Polkanten und der Mittelkanten zusammen genommen, so dass, wenn zwei der Hauptaxen bekannt sind, die dritte sich leicht berechnen lässt.

Fig. 122 zeigt das Rhomboeder $-5R$ in der Centraldistanz $\frac{3}{5}$, Fig. 123 die Kombination von $R_3(1)$ mit $4R(1)$ mit dem Verhältnis $a:c = 1:0{,}86\overline{6}$ (bei Kalkspat $1:0{,}810$) in der Hälfte des gewöhnlichen Massstabes.

Eine Abstumpfung der Mittelecken der Skalenoeder wird auch durch das Prisma erster Ordnung bewirkt.

Die Koordinaten der Eckpunkte auf den Polkanten werden in diesem Fall wie bei Fig. 123 berechnet, und zwar die Punkte auf den längeren Polkanten wie bei den holoedrischen Formen nach Formel 3 (§ 86): $x = y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{4}{3}$, bezw. $x = y = 1$, $z = \frac{1}{2}$. Die kürzeren Polkanten führen von einer Polecke nach dem Schnittpunkt zweier durch einen dazwischenliegenden Sextanten getrennter Basiskanten, z. B. $A_1 B_8$ und $A_8 B_1$, der auf der Zwischenaxe liegt, und den aus der Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1-\frac{1}{n_1} \\ 1-\frac{1}{n_1} & 1 \end{vmatrix}$ zu berechnenden Wert $\frac{\sqrt{3}}{2-\frac{1}{n_1}}$ hat.

Die von der entgegengesetzten Polecke ausgehende längere Polkante schneidet diese Zwischenaxe in der Entfernung $\frac{\sqrt{3}}{1+\frac{1}{n_2}}$. Die Koordinaten des Schnitt-

punktes lassen sich aus der Determinante unter Berücksichtigung der Centraldistanzen berechnen:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{2-\frac{1}{n_1}}{d_1\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{d_1 m_1} \\ \dfrac{1+\frac{1}{n_2}}{d_2\sqrt{3}} & \dfrac{1}{d_2 m_2} \end{vmatrix}, \text{ und zwar ist}$$

$$x=y=\frac{\frac{d_1}{m_2}+\frac{d_2}{m_1}}{\frac{1}{m_2}\left(2-\frac{1}{n_1}\right)+\frac{1}{m_1}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)},\quad z=\frac{d_2\left(2-\frac{1}{n_1}\right)-d_1\left(1+\frac{1}{n_2}\right)}{\frac{1}{m_2}\left(2-\frac{1}{n_1}\right)+\frac{1}{m_1}\left(1+\frac{1}{n_2}\right)}. \quad (8)$$

Für $\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ (1) und $4R$ (1) sind die Werte darnach: $x=y=\frac{7}{11}$, $z=-\frac{2}{3}$, für $\frac{3P\frac{3}{2}}{2}$ (1) und ∞P (1) dagegen $x=y=\frac{1}{2}$, $z=-1$. Die abstumpfenden Flächen sind in beiden Fällen Deltoide.

Das Prisma zweiter Ordnung, welches bei der rhomboedrischen Hemiedrie nicht verändert wird, erscheint in Kombination mit den Skalenoedern derart, dass es die Mittelkanten derselben abstumpft.

Die Zeichnung einer solchen Kombination kommt am einfachsten so zustand, dass man durch alle Mittelecken des Skalenoeders (Fig. 58) mit der Hauptaxe parallele, unter sich gleich lange Prismenkanten zieht, und die untere Polecke um dieselbe Strecke weiter nach unten setzt. Beträgt diese Strecke, wie bei Fig. 58, drei Quadratseiten, so erhält man die Kombination $R_3\left(\frac{10}{9}\right) . \infty P2$ (1).

Als Beispiel einer Kombination von stumpferen und spitzeren Rhomboedern in verschiedener Stellung möge der in Fig. 124 dargestellte Chabasitkrystall in der Form $P=+R$ (1), $r=-\frac{1}{2}R\left(\frac{8}{5}\right)$, $n=-2R\left(\frac{6}{5}\right)$ dienen. Das Rhomboeder $(-\frac{1}{2}R)$, welches die Polkanten (von $+R$) gerade abstumpft, heisst das e r s t e s t u m p f e r e, dasjenige, dessen Kanten durch das Rhomboeder $(+R)$ abgestumpft werden $(-2R)$, das e r s t e s p i t z e r e R h o m b o e d e r.

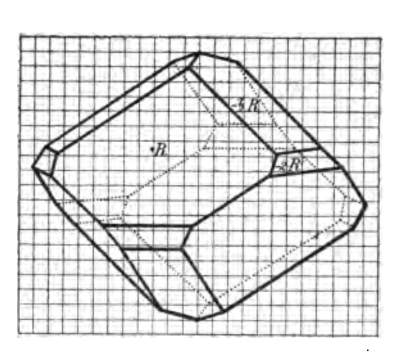


Fig. 124.

Das erste stumpfere Rhomboeder ist stets das Rhomboeder in entgegengesetzter Stellung, dessen Hauptaxe halb so gross ist, das erste spitzere dasjenige in entgegengesetzter Stellung, dessen Hauptaxe die doppelte Länge hat.

Die Kante der Flächen $A_1 B_1 C_m$ und $A_{-1} B_\infty C_m$, also die Polkante von mR, wird abgestumpft durch die tautozonale Fläche $A_\infty B_1 C_{m_1}$, welche in demselben Raumteil liegt, wie die abgestumpfte Kante. Aus der Determinante der reciproken Ableitungszahlen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{m} \\ -1 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & \frac{1}{m_1} \end{vmatrix} = 0, \text{ folgt } \frac{1}{m_1} - \frac{2}{m} = 0, \text{ also } m = 2m_1.$$

Für den Chabasit ist $a:c = 1{,}0858$ (darnach wäre c in der Zeichnung $= 11{,}284$, wofür 11,25 genommen wurde). Die Koordinaten der vier verschiedenen Ecken sind: für die Polecke rrr: $0, 0, \frac{4}{5}$; für rrP: $\frac{2}{15}, \frac{2}{15}, \frac{11}{15}$; rPn: $-\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, \frac{4}{15}$; PnP: $-\frac{4}{15}, \frac{17}{15}, \frac{2}{15}$.

Die Mittelecken der Rhomboeder werden durch die spitzeren Rhomboeder in entgegengesetzter Stellung abgestumpft; durch das erste spitzere Rhomboeder in der Weise, dass die in der Ecke zusammenstossenden Kanten in demselben Verhältnis verkürzt werden.

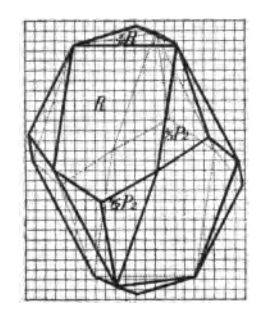


Fig. 125.

Die Polecken werden durch die Basis abgestumpft. Besonders häufig sind die Kombinationen mR (1), $oR\left(\frac{m}{8}\right)$ bei denen die Basis durch die Mittelecken geht, z. B. Kalkspat $-\frac{1}{2}R(1)$, $oR(\frac{1}{6})$ und Manganspat $4R(1)$, $oR(\frac{4}{3})$.

Die Abstumpfung der Mittelkanten erfolgt wie bei den Skalenoedern durch das Prisma zweiter Ordnung $\infty P2$.

Auch die Pyramiden zweiter Ordnung werden bei der rhomboedrischen Hemiedrie nicht verändert und treten in der vollen Flächenzahl auf. Als Beispiel diene die am Eisenglanz häufige Kombination Fig. 125. $\frac{4}{3}P2$ (1), R (1), $\frac{1}{4}R$ (3). Die Mittelecken werden durch die Pyramide zweiter Ordnung zugeschärft, die Polecke durch die stumpfere Pyramide zugespitzt.

Unter den Kombinationsecken sind die sechs primären Basisecken. Hierzu kommen auf den sekundären Polkanten die Ecken mit den Koordinaten $\frac{14}{25}, \frac{14}{25}, -\frac{8}{25}$ und $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$. Um ein richtiges Bild eines Eisenglanzkrystalls zu erhalten, muss man $a:c$ möglichst gleich $1:1{,}359$ wählen, also als Einheit der C-Axe 14, statt 18, was einem Axenverhältnis $1:1{,}732$ entspricht.

§ 98. Trapezoedrisch-tetartoedrische Krystalle. Während trapezoedrisch-hemiedrische Formen bis jetzt nur an zwei künstlich dargestellten Salzen (Rechtsweinsaures Antimonyl — Baryum + salpetersaures Kalium und das analoge Bleisalz) aufgefunden wurde, giebt es einige trapezoedrisch-tetartoedrische Substanzen, darunter der Zinnober und der Quarz. Ein Krystall des letzteren möge als Beispiel dieser Art von Tetartoedrie dienen (Fig. 126). Der tetartoedrische Habitus zeigt sich an diesen Krystallen äusserlich nur bei dem Auftreten von Flächen der zwölfseitigen Pyramiden und der Pyramiden zweiter Ordnung, welche dann nur mit je sechs Flächen, als tetartoedrische Trapezoeder $\frac{mPn}{4}$ bezw. trigonale Pyramiden $\frac{mP2}{2}$ erscheinen. Dabei erscheinen an einem Krystall nie rechte und linke Trapezoeder und trigonale Pyramiden derselben Art, sondern nur rechte positive mit linken negativen und umgekehrt. Darnach unterscheidet man überhaupt rechte Krystalle, wie Fig. 126, bei denen die Trapezoeder und trigonalen Pyramidenflächen rechts von $+R$ liegen, und linke, bei denen sie links davon liegen.

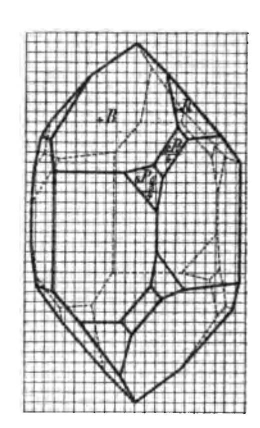


Fig. 126.

Die häufig, aber stets untergeordnet, vorkommende trigonale Pyramide ist $s = \frac{2P2}{4}$, wie aus den parallelen Kombinationskanten mit $P = +R$ und $r = \infty P$ folgt. Die Trapezoederflächen liegen mit $\frac{2P2}{4}$ und $z = -R$ und ∞P in einer Zone und gehören darnach allgemein zu den Trapezoedern $mP\frac{m}{m-1}$, von denen $x = 6P\frac{6}{5}$ am häufigsten auftritt. $+R$ und $-R$ treten nur selten mit gleicher Centraldistanz auf. Die Kante $P.r$ wird durch $3R$ oder $4R$, die Kante $z.r$ durch $-7R$ oder $-11R$ abgestumpft. Die abwechselnden Prismenkanten werden zuweilen (Carrara) durch schmale Flächen des trigonalen Prismas $\frac{\infty P2}{4}$ abgestumpft.

Fig. 126 ist die Kombination $r = \infty P\,(1)$, $P = +R\,(\frac{3}{2})$, $z = -R\left(\frac{7}{4}\right)$, $s = \frac{2P2}{4}\left(\frac{6}{5}\right)$, $x = \frac{6P\frac{6}{5}}{4}\left(\frac{37}{36}\right)$, $a:c = 1:1{,}15\,(12)$ statt $1:1{,}0999$.

Ecken	x	y	z
PPP	0	0	$\frac{3}{2}$
PPz	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{4}$
Pzs	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{17}{20}$
Psx	$\frac{1}{24}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{67}{120}$
sxr	$-\frac{7}{120}$	1	$\frac{11}{24}$
xrr	0	1	$\frac{1}{6}$
xrP	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
szr	$-\frac{7}{20}$	1	$\frac{3}{4}$
zrP	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$
rPr	1	0	$\frac{1}{2}$

§ 99. **Rhomboedrisch-tetartoedrische Krystalle.** Rhomboedrisch-tetartoedrische Krystalle werden als solche daran erkannt, dass Rhomboeder verschiedener Ordnung an ihnen auftreten. Derartige Krystalle, die Rhomboeder dritter Ordnung $-\frac{2R\frac{7}{6}}{2} = -\frac{r}{l}\frac{\frac{7}{3}P\frac{14}{13}}{4}$ (vergl. § 60) neben dem Rhomboeder erster Ordnung $-2R$ zeigen, welche erstere die Hälfte der Kombinationskanten zwischen den letzteren und dem Prisma zweiter Ordnung $\infty P2$ abstumpfen und sich dadurch als Halbflächner der Skalenoeder erkennen lassen, finden sich am Dioptas Fig. 127.

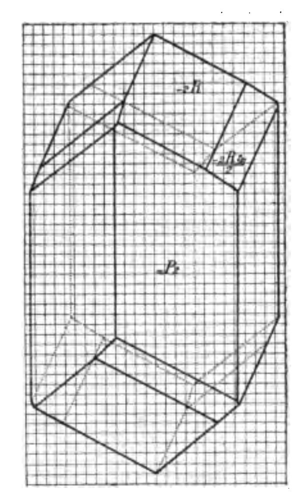


Fig. 127.

Die Kombination $m = \infty P2\,(1)$, $r = -2R\,(2)$, $s = -\frac{2R\frac{7}{6}}{2} = -\frac{r}{l}\frac{\frac{7}{3}P\frac{14}{13}}{4}$ hat folgende Ecken:

Ecken	x	y	z
$r\,r\,r$	0	0	4
$r\,r\,s$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$r\,s\,m$	$\frac{25}{39}$	$\frac{53}{78}$	$\frac{103}{78}$
$s\,m\,m$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{31}{12}$
$m\,m\,s$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{4}$
$m\,s\,r$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$

§ 100. **Hemimorphie an hexagonalen Krystallen.** Als Beispiel einer hexagonalen hemimorphen Substanz diene ein Krystall von Turmalin, Fig. 128, welches Mineral von einer Eigenschaft, die allen hemimorphen Substanzen zukommt, dass sie nämlich beim Erwärmen polar elektrisch werden vor 200 Jahren schon den Namen Aschenzieher bekommen hat. Man nennt das Ende der Axe, welches beim Erwärmen positive Elektrizität zeigt, den „analogen" Pol, dasjenige welches dabei negativ elektrisch wird, den „antilogen" Pol. (Beim Abkühlen wird der erstere negativ, der letztere positiv elektrisch).

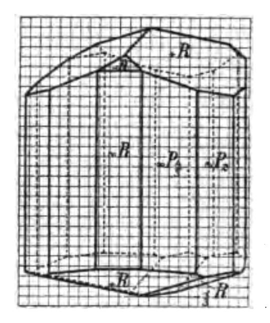


Fig. 128.

Da der Turmalin rhomboedrisch krystallisiert, treten bei der Hemimorphie das dihexagonale Prisma und das primäre Prisma nur mit der Hälfte ihrer Flächen, also als ditrigonale und trigonale Prismen auf, weil von den 12 bezw. 6 Flächen, welche jene Formen auch bei der Hemiedrie zeigen, die eine Hälfte dem oberen und die andere Hälfte dem unteren Ende des Krystalls angehört. Das Prisma zweiter Ordnung tritt dagegen vollflächig auf. Der analoge Pol ist der Pol an dem $+R$ auf die Flächen des trigonalen Prismas aufgesetzt ist (unten in Fig. 128) und nicht auf die Kanten.

Die Kombination ist $s = \infty P 2\,(1)$, $p = \infty P \frac{4}{3} \left(\frac{13}{14}\right)$, $l = \infty P (1)$, $P = +R\,(3)$, $o = -2\,R$ (nur am antilogen Pol), $r = -\frac{1}{2} R \left(\frac{39}{7}\right)$ (nur am analogen Pol), $a : c = 1 : 0{,}4474$ (in der Zeichnung $c = 4\frac{2}{3}$ also $a : c = 1 : 0{,}4487$).

Ecken	x	y	z
1. PPP	0	0	3
2. PPo	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{18}{7}$
3. Pol	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{16}{7}$
4. Pps	$\frac{6}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{13}{7}$
5. ssP	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
6. ssr	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{89}{42}$
7. srP	$\frac{17}{21}$	$\frac{3}{21}$	$-\frac{46}{21}$
8. Plp	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$	-2
9. rPr	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{19}{7}$
10. rrr	0	0	$-\frac{39}{14}$

Bei den Ecken 4, 5, 6, 7 sind die Koordinaten auf andere Axen bezogen (vergl. § 95).

Da bei den trapezoedrisch-tetartoedrischen Substanzen in den Richtungen der Nebenaxen Hemimorphie vorhanden ist, so ist zu erwarten, dass z. B. bei Quarz die Nebenaxen die elektrischen Axen sind. In der That fällt bei diesem Mineral der analoge Pol stets an die Kante, an der die Trapezoeder und trigonalen Pyramiden erscheinen.

Die Figuren 122—128 zeigen Krystalle von trigonalem Charakter.

XIII. Kapitel.

Tetragonale Krystalle.

§ 101. Holoedrische tetragonale Krystalle. Die tetragonalen Krystalle sind wie die hexagonalen pyramidal, prismatisch oder tafelartig, je nachdem die Pyramiden und Prismen oder die Basis vorherrscht. Als Beispiele der ersten Art können die in den Fig. 98, 100 und 101 abgebildeten Kombinationen dienen. Prisma-

tische Krystalle zeigen oft nur ein Prisma, das durch die Basis oder eine Pyramide geschlossen ist. Ist die letztere von gleicher Ordnung, so sitzen die Flächen derselben auf den Flächen des Prismas auf, ist sie anderer Ordnung auf den Kanten desselben, und kann dann die Kombination einem Rhombendodekaeder ähnlich werden. Ist die Basis vorherrschend, d. h. ist die Centraldistanz von $o P$ relativ klein, so werden Krystalle tafelartig.

Als Beispiele flächenreicherer Kombinationen mögen Fig. 129 und Fig. 130 dienen. Fig. 129 stellt eine Kombination des Zinn-

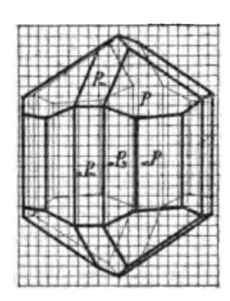


Fig. 129.

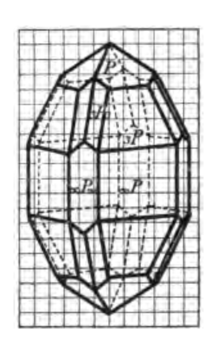


Fig. 130.

erzes dar: $\infty P\left(\frac{25}{18}\right)$, $\infty P \infty$ (1), $\infty P 3 \left(\frac{19}{18}\right)$, $P\left(\frac{18}{6}\right)$, $P\infty$ (2), $a : c = 1 : 0{,}66\bar{6}$ (statt $1 : 0{,}672$). Das ditetragonale Prisma $\infty P 3$ stumpft die Kombinationskante zwischen dem primären und sekundären Prisma schief, die Pyramide zweiter Ordnung $P\infty$ die Polkanten der Pyramide erster Ordnung P gerade ab.

Ausser der Polecke $(0, 0, 2c)$ sind noch dreierlei Kombinationsecken vorhanden:

$$\left(x = \frac{1}{6}, y = \frac{1}{6}, z = \frac{11}{6} c\right), \left(1, \frac{1}{6}, 1 c\right), \left(\frac{8}{9}, \frac{1}{2}, \frac{7}{9} c\right).$$

Fig. 130 zeigt eine Kombination des Zirkones $\infty P\left(\frac{2}{3}\right)$, $\infty P\infty \left(\frac{5}{9}\right)$, $3 P 3 \left(\frac{18}{18}\right)$, $P\left(\frac{3}{2}\right)$, $3 P\left(\frac{43}{54}\right)$.

Die ditetragonale Pyramide schärft die Polkanten der primären Pyramide von gleichem m zu, also $3 P 3$ die Kante von $3 P$; dagegen schärft dieselbe Pyramide die Polkanten derjenigen sekundären Pyramide zu, deren m halb so gross ist, also $3 P 3$ die Kanten von $\frac{3}{2} P\infty$. Die Grösse von n in $m P n$ lässt sich in diesem Fall aus der Lage in der Zone von P und $\infty P\infty$ bestimmen, in der alle $m P n$ liegen bei denen $m = n$ ist.

§ 102. **Pyramidal-hemiedrische Formen.** Der pyramidal-hemiedrische Charakter tritt an Krystallen nur dann hervor, wenn Prismen oder Pyramiden der Zwischenstellung neben Pyramiden und Prismen erster oder zweiter Ordnung auftreten. Als Beispiel kann Fig. 131 dienen, welche einen Krystall des Scheelit (Wolframsaurer Kalk) in einer Stellung wiedergiebt, bei der die vorherrschende Pyramide eine solche zweiter Ordnung ist, während die untergeordnete Pyramide P als erster Ordnung gewählt ist, weil parallel zu ihren Flächen deutliche Spaltbarkeit vorhanden ist. Die Fig. 131 zeigt digt die Kombination $e = P\infty(1)$, $h = \frac{l}{r}\frac{P3}{2}\left(\frac{31}{27}\right)$, $o = P\left(\frac{14}{9}\right)$, $s = \frac{r}{l}\cdot\frac{3P3}{2}\left(\frac{10}{9}\right)$; $a : c = 1 : 1{,}55\bar{5}$ statt $1 : 1{,}536$. $\frac{P3}{2}$ liegt links, $\frac{3P3}{2}$ rechts von P, alle drei Flächen mit $P\infty$ in einer Zone.

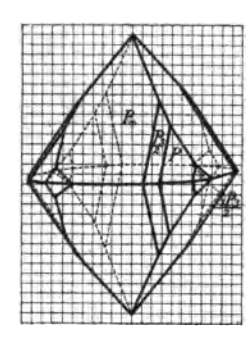


Fig. 131.

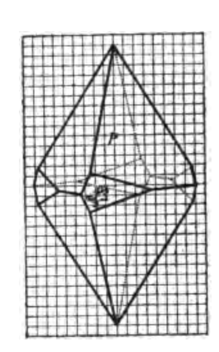


Fig. 132.

Die Kombinationsecken in Fig. 131 haben folgende Koordinaten: Die Ecken im basischen Hauptschnitt (e, e, h) $1, \frac{4}{9}, 0$; (h, h, o) $\frac{17}{18}, \frac{11}{18}, 0$; (o, o, s) $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, 0$; (s, s, e) $\frac{1}{3}, 1, 0$; die Ecke im sekundären Hauptschnitt (e, e, h) $\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}$; die Zwischenecken (e, h, o) $\frac{5}{9}, \frac{11}{18}, \frac{7}{18}$, und (o, e, s) $\frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{9}$.

In Fig. 132 ist die Kombination der Pyramide P mit dem Prisma dritter Ordnung $\frac{\infty P\frac{4}{3}}{2}\left(\frac{31}{36}\right)$ dargestellt, welche sich am **Wulfenit**, (Molybdänsaures Blei) oft noch mit hinzutretender Basis, findet. Das Prisma stumpft die Basisecken schief ab. Da die oberen Pyramiden- und Basisflächen hierbei gewöhnlich eine andere Oberflächenbeschaffenheit zeigen, als die unteren, auch zuweilen an dem unteren Ende noch andere Formen hinzutreten, so bietet der Wulfenit ein Beispiel von Hemimorphie im tetragonalen System.

Andere Beispiele sind künstlich dargestellte Verbindungen, wie das gleichfalls hemimorph-hemiedrische Rechtsweinsaure Antimonyl-Baryum und das hemimorph holoedrische Succinjodimit und Penta-Erythrit.

Die Kombinationsecken auf den Polkanten Fig. 132 haben die Koordinaten $\left(\frac{31}{36}, 0, \frac{5}{36}\right)$; die im basischen Hauptschnitt $\left(\frac{58}{63}, -\frac{5}{63}, 0\right)$ und $\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}, 0\right)$, $a:c$ ist ebenfalls $1:1{,}55\bar{5}$ statt $1:1{,}577$.

§ 103. Sphenoidisch-hemiedrische Formen. Als Beispiel einer sphenoidisch-hemiedrischen Substanz kann der Kupferkies dienen. Derselbe zeigt nahezu reguläre Dimensionen $a:c = 1:0{,}986$, so dass, wenn die beiden Sphenoide mit gleicher Centraldistanz auftreten, eine Form erscheint, die sich von einem Oktaeder nur dadurch unterscheiden lässt, dass die Flächen von $+\frac{P}{2}$ gewöhnlich

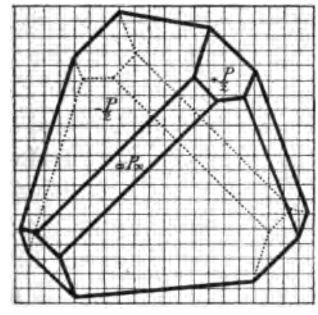


Fig. 133.

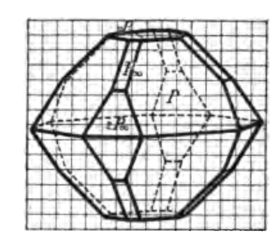


Fig. 134.

rauh oder gestreift die von $-\frac{P}{2}$ glatt zu sein pflegen. Fig. 133 zeigt die beiden Sphenoide $-\frac{P}{2}$ (1), $+\frac{P}{2}$ (2) mit dem Prisma zweiter Ordnung $\infty P \infty$ $(\frac{5}{6})$. Fig. 134 ist die Kombination $-\frac{P}{2}$ (1), $+\frac{P}{2}$ (1), $P\infty\left(\frac{17}{18}\right)$, $2P\infty\left(\frac{7}{9}\right)$, $oP\left(\frac{2}{3}\right)$ und zeigt bei gleicher Centraldistanz von $+\frac{P}{2}$ und $-\frac{P}{2}$ holoedrischen Charakter.

In Fig. 133 sind nur zweierlei Ecken, vier mit den Koordinaten $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 1$, und 16 mit den Koordinaten $\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$. In Fig. 134 sind dreierlei Ecken, je 16 mit den Koordinaten $\left(\frac{5}{18}, \frac{1}{18}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{11}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{3}\right)$ und $\left(\frac{7}{9}, \frac{2}{9}, 0\right)$.

Beispiele von trapezoedrisch-hemiedrischen tetragonalen Mineralien sind bis jetzt in der Natur nicht aufgefunden. Einige künstlich dargestellte Verbindungen, welche äusserlich holoedrisch krystallisiert zu sein scheinen, sind als hierher gehörig teils an sog. Aetzfiguren, teils an der Cirkularpolarisation, welche nur enantiomorphen Substanzen zukommt, erkannt worden. Beispiele davon sind u. A. das schwefelsaure Nickel und das schwefelsaure Strychnin.

XIV. Kapitel.

Kombinationen an Krystallen ohne Hauptaxe.

§ 104. Holoedrische Formen des rhombischen Systems. Die Mannigfaltigkeit der Formen ist im rhombischen System ausserordentlich gross und zwar nicht bloss wegen der grossen Zahl der Pyramiden, Prismen und Domen, sondern auch wegen der Verschiedenheit der Grundform selbst bei den rhombischen Mineralien, und der Möglichkeit verschiedener Aufstellung desselben Krystalls. Auch die Anzahl der rhombisch krystallisierten Mineralien ist ausserordentlich gross. Es möge genügen, einen Krystall darzustellen, an dem die verschiedenen Arten von Formen vertreten sind. Fig. 135 ist die Kombination $\infty \bar{P} \infty\,(\frac{4}{3})$, $\infty \breve{P} \infty\,(\frac{5}{6})$, $0P(2)$, $\infty P(\frac{5}{3})$, $P(\frac{8}{3})$, $\bar{P} \infty\,(\frac{7}{3})$, $2 \breve{P} \infty\,(\frac{4}{3})$, bei der das Axenverhältnis $a:b:c = 0{,}5:1:0{,}55\bar{5}$ angenommen ist (Olivin $a:b:c = 0{,}466:1:0{,}5866$).

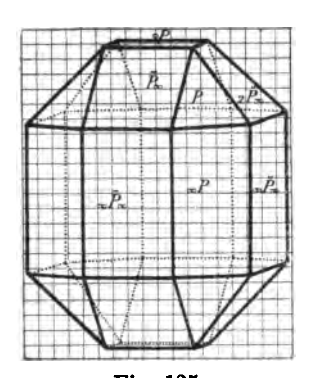


Fig. 135.

Die drei Arten von Ecken haben die Koordinaten $\left(x = \frac{1}{3}a,\ y = \frac{1}{3},\ z = 2c\right)$, $\left(\frac{4}{3}a, \frac{1}{3}, c\right)$, $\left(\frac{5}{6}a, \frac{5}{6}, c\right)$.

Hierbei treten die drei wichtigsten Zonen, die Zone der Prismen, der Makrodomen und der Brachydomen hervor. Die Makroprismen würden an der Form die Kombinationskante des primären Prismas ∞P und Makropinakoides $\infty \bar{P} \infty$, die Brachyprismen dagegen die

Kante zwischen ∞P und $\infty \breve{P} \infty$ abstumpfen. Die Kombinationskanten in der Zone der Makrodomen würden durch steilere und flachere Makrodomen abgestumpft, spitzere Pyramiden würden die Kanten zwischen P und ∞P abstumpfen, Makropyramiden die Kanten zwischen P und $\bar{P}\infty$, Brachypyramiden diejenigen von P und $\breve{P}\infty$. Die Ecken der Form würden durch stumpfe Vertikalpyramiden bezw. durch spitze Makro- und Brachypyramiden abgestumpft werden.

§ 105. **Hemiedrische rhombische Krystalle.** Als ein Beispiel hemiedrischer Ausbildung kann das Bittersalz dienen, dessen Krystalle gewöhnlich die in Fig. 136 abgebildete Kombination ∞P, $+\frac{P}{2}$ zeigen, wobei das Prisma bei dem Axenverhältnis der Grundform $a:b:c = 0{,}9901:1:0{,}5709$ nahezu quadratisch ist, was zu einer Aufstellung veranlassen kann, bei der die Prismenflächen als Pinakoide erscheinen. In diesem Fall würden die Sphenoidflächen auf der einen Seite als Makrodoma, auf der anderen als Brachydoma erscheinen.

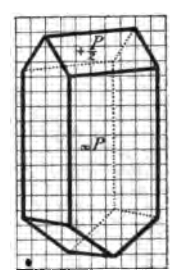


Fig. 136.

In der Zeichnung ist $a = b = 1$ und $c = \frac{5}{9}$ angenommen, $\infty P(\frac{1}{2})$ und $+\frac{P}{2}(\frac{3}{2})$. Der Schnittpunkt der Axen liegt in der Figur in der Mitte zwischen zwei Linien, so dass die Endpunkte der Vertikalaxe in der Entfernung $\frac{3}{2}c$ in Eckpunkte fallen. Die Koordinaten der zwei Arten von Ecken sind $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = c$ und $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$, $z = \frac{3}{2}c$.

§ 106. **Hemimorphie.** Auch im rhombischen System giebt es mehrere hemimorphe Substanzen. Die Fig. 137 stellt eine derselben, den Struvit, in der Kombination $\infty \breve{P} \infty$ $(\frac{7}{9})$, $\breve{P}\infty$ (1), $4\breve{P}\infty$ $(\frac{11}{12})$, $\breve{P}\infty$ $(\frac{3}{2})$ (diese 3 Formen nur am oberen antilogen Pol), $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$ (1), $0P$ $(\frac{1}{9})$, die beiden letzteren Formen nur am unteren, analogen Pol, dar. Die Axe der Hemimorphie wählt man als Vertikalaxe.

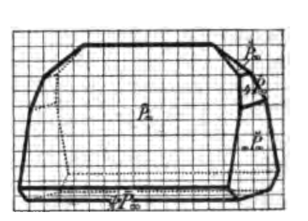


Fig. 137.

Das Axenverhältnis der Grundform des Struvit ist $a:b:c = 0{,}5626:1:0{,}9163$, wofür hier $0{,}55\bar{5}:1:1$ gewählt wurde. Die Ecken haben die Koordinaten $(0, \frac{1}{2}, 1)$ $(\frac{2}{9}, \frac{13}{18}, \frac{7}{9})$ $(\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \frac{5}{9})$ $(1, \frac{7}{9}, 0)$ $(\frac{2}{3}, \frac{7}{9}, -\frac{1}{9})$.

§ 107. Monokline Krystalle. Im monoklinen System gehören zur genauen Bezeichnung der Grundform eines bestimmten Minerals drei Angaben, nämlich ausser dem Verhältnis $a:b:c$ noch die Grösse des schiefen Winkels β, den die A-Axe mit der C-Axe bildet, und es ist deshalb die Möglichkeit verschiedener Aufstellung eine noch grössere als bei rhombischen Krystallen.

Die Richtung der schiefen Axe kann ausser durch die Grösse des Winkels auch durch das konstante Verhältnis bezeichnet werden, welches zwischen den beiden rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes derselben besteht (Tangente des Winkels). In den folgenden Zeichnungen ist die Klinoaxe horizontal, die Vertikalaxe schief gezeichnet. Als Beispiele können die in den Fig. 138, 139 und 140 dargestellten Formen dienen, die sich häufig am Gips finden. Das Verhältnis, welches

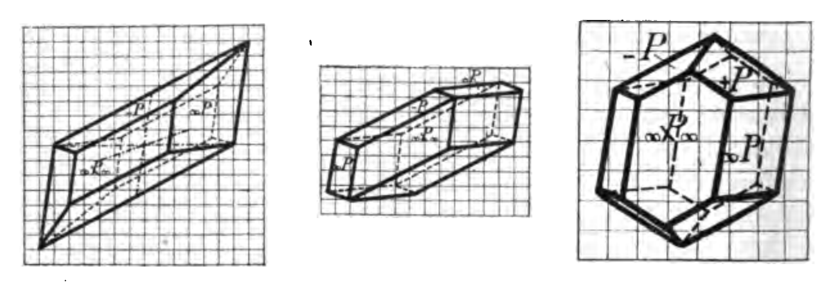


Fig. 138. Fig. 139. Fig. 140.

die Richtung der Vertikalaxe bezeichnet, ist hier 7 : 1 angenommen, was einem Winkel von 81° 5′ ($tg\,\beta = 7$) entspricht, während dieser durch Messung 81° 52′ gefunden wird. Nimmt man als Endpunkt der Vertikalaxe den Punkt, der $3^1/_2$ Quadratseiten nach oben und $^1/_2$ nach rechts liegt, so entspricht das einer Länge von $\frac{1}{2}\sqrt{7^2+1^2}\,.\,\frac{1}{9} = 0{,}393$, während sie 0,416 betragen sollte. $a:b$ ist $0{,}66\overline{6}:1$ statt 0,689 : 1 angenommen. Das dem Winkel der Axen entsprechende Verhältnis findet man mit hinreichender Genauigkeit, wenn man den Winkel mit dem Transporteur auf quadriertem Papier so aufträgt, dass der Scheitel in einen Schnittpunkt fällt und ein Schenkel horizontal liegt. Der andere Schenkel wird dann genau oder doch annähernd durch einen anderen Schnittpunkt gehen.

Fig. 138 stellt die Kombination $-P(1)$, $\infty P(1)$, $\infty P \infty (\frac{1}{2})$ dar, die häufig an eingewachsenen Krystallen des Gipses vorkommt. Die Flächen der Hemipyramiden bilden einen stumpferen Winkel, als die des Prismas und lassen sich dadurch von diesen unterscheiden. [Ecken sind: (1, 0, 0), ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0), (— $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1), (— 1, 0, 2)]. Bei Fig. 139 tritt zu den Formen in Fig. 138 noch die Basis $0\,P(1)$. Die Ecke (— 1, 0, 2) wird abgestumpft, und es treten als neue Ecken (0, 0, 1) und (— 1, 0, 1) hinzu. Statt der Basis erscheinen auch Hemiorthodomenflächen, die ganze Kombination oft mit abgerundeten Kanten und Flächen (die sog. Linsen). An aufgewachsenen Kry-

stallen erscheint zuweilen auch die positive Hemipyramide $+P$. Fig. 140 ist die Kombination $-P(1)$, $+P(1)$, $\infty P(\frac{1}{2})$, $\infty \bar{P} \infty (\frac{1}{4})$ mit den Ecken $(0, 0, 1)$, $(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

Bei dem **Kalifeldspat** Fig. 141 und Fig. 142 ist das Axenverhältnis $a : b : c = 0{,}695 : 1 : 0{,}555$, $\beta = 63^0 57$.

In Fig. 141 und Fig. 142 ist c als Hypotenuse eines Dreiecks genommen, dessen eine Kathede (5) doppelt so gross ist als die andere ($2^1/_2$), was einem Winkel von $63^0\,26'$ entspricht und einer Länge von 0,621 statt 0,555 ($\frac{5}{9}$). $a : b = 0{,}66\bar{6} : 1$.

Fig. 141 zeigt die am Adular gewöhnliche Kombination $\infty P(1)$, $0P(1)$, $+P\infty(1)$ mit den Ecken $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$. Fig. 142

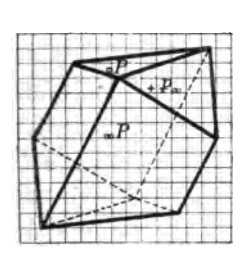


Fig. 141.

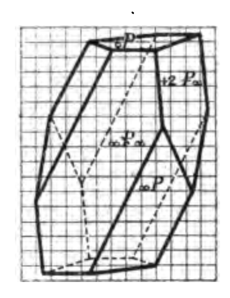


Fig. 142.

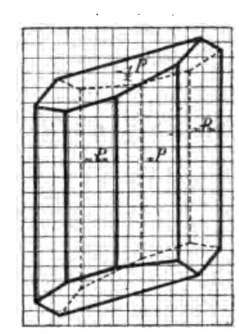


Fig. 143.

ist von Fig. 141 abgeleitet; indem man die Prismenkanten an dieser Figur alle um c verlängert, bekommt $0P$ die Centraldistanz $\frac{3}{2}$. Verbindet man die Ecken $(0, 1, 1)$ statt mit $(-1, 0, 0)$ mit $(-1, 0, -1)$, so erhält man statt $+P\infty(1)$ das steilere Hemiorthodoma $+2P\infty(\frac{1}{2})$. Verkürzt man dann die Kombinationskanten des Prismas mit der Basis und dem Hemidoma und die Kante zwischen diesen letzteren Flächen auf die Hälfte ihrer Länge und verbindet diese Punkte, so erhält man das Klinopinakoid $\infty \bar{P} \infty (\frac{1}{2})$. Der monosymmetrische Habitus tritt an monoklinen Krystallen mit Hemipyramiden auch dann deutlich hervor, wenn der Winkel β nahezu ein Rechter ist, wie das beim **Augit** der Fall ist $\beta = 89^0\,38'$. Die Zeichnung erfolgt dann ganz wie bei rhombischen Krystallen. Fig. 143 ist die an dem Augit häufigste Kombination $-\frac{1}{2}P(3)$, $\infty P(1)$, $\infty \bar{P} \infty (\frac{1}{2})$, $\infty \bar{P} \infty (\frac{5}{6})$.

Das Axenverhältnis für Augit ist $a : b : c = 1{,}058 : 1 : 0{,}594$, wofür $1{,}05\bar{5} : 1 : 0{,}592$, also $a = 9\frac{1}{2}$, $c = 5\frac{1}{3}$ Quadratseiten genommen wurde.

Ecken sind $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{4}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{5}{4}\right)$ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1\right)$ $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1\right)$.

Die Hemiedrie des monoklinen Systems, welche darin besteht, dass von den den allgemeinsten Fall einer Form dieses Systems darstellenden Flächen einer Hemipyramide zwei in der Symmetrieebene aneinanderstossende Flächen wachsen, während die parallelen Gegenflächen verschwinden ist bis jetzt an Mineralien noch nicht nachgewiesen, dagegen bilden das Tetrathionsaure Kalium und der Paratoluidoisobuttersäurester Beispiele hierher gehöriger dargestellter Substanzen. Die Basis, das Orthopinakoid und die Hemiorthodomen erscheinen dabei als einzelne von den Gegenflächen unabhängige Flächen, die Klinodomen und die Pyramiden in Gestalt zweier in der Symmetrieebene anliegender Flächen und nur das Klinopinakoid bleibt unverändert.

Die Hemimorphie zeigt sich im monoklinen System in der Weise, dass die Flächen einer Form an dem einen Ende der Symmetrieaxe unabhängig von den zugehörigen am anderen Ende dieser Axe vorkommen und die Symmetrieebene damit als solche wegfällt, die Symmetrieaxe aber eine elektrische Axe wird. Während natürliche Verbindungen dieser Art bis jetzt nicht gefunden wurden, gehören hierher neben dem schwefelsauren Lithium eine Anzahl wichtiger organischer Verbindungen, unter anderen die Rechtsweinsäure und die Linksweinsäure, das rechtsweinsaure Kalium, -Ammonium und -Strontium, Rohrzucker und Milchzucker.

§ 108. Trikline Krystalle. Da im triklinen System alle Formen nur als Flächenpaare auftreten, so kann an und für sich jeder Krystall jede beliebige Stellung erhalten; doch pflegt man als Axen die Zonenaxen der flächenreichsten Zonen zu nehmen, oder die Stellung zu wählen, bei der die Bezeichnung der Flächen eine besonders einfache wird. Häufig treten auch Prismen oder Domen vollflächig auf, und ist einer der Winkel nahezu 90°, so dass die Aufstellung wie bei monoklinen Krystallen nahe liegt. Dies gilt z. B. auch für die triklinen Feldspate, die in ihrem Habitus dem Orthoklas oder Kalifeldspat sehr ähnlich sind, und als triklin nur daran erkannt werden, dass Basis und Orthodoma bezw. Makrodoma auf dem Klinopinakoid bezw. Brachypinakoid nicht senkrecht stehen

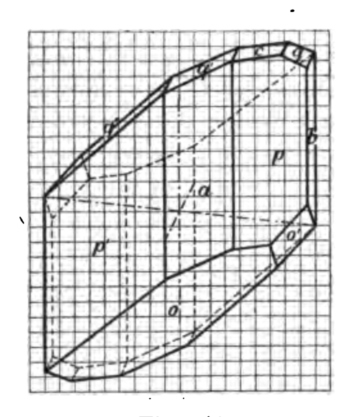


Fig. 144.

und die Pyramiden- und Brachydomen als Viertelpyramiden und Hemidomen auftreten.

Fig. 144 kann als ein Beispiel einer flächenreichen triklinen Kombination gelten, wie sie z. B. der Kupfervitriol zeigt. Die Kombination ist $a = \infty \bar{P} \infty\,(1)$, $b = \infty \breve{P} \infty\,(1)$, $c = o P\,(\frac{5}{2})$, $p' = \infty\,{}'P\,(1)$, $p = \infty P'\,(\frac{3}{2})$, $q = {,}\breve{P}'\infty\left(\frac{10}{3}\right)$, $q' = {}'\breve{P}{,}\,\infty\,(2)$, $q'' = 2\,{}'\breve{P}{,}\,\infty\,(1)$, $o = P{,}\,(\frac{3}{2})$, $o' = 3\,\breve{P}{,}\,3\,(1)$.

Das gewählte Axenkreuz ist aus der Figur zu ersehen, nur die C-Axe erscheint in natürlicher Grösse, die beiden anderen Axen erscheinen ebenso wie die drei schiefen Winkel derselben verzerrt. Bei dem Kupfervitriol ist $a:b:c = 0{,}5656 : 1 : 0{,}5499$, $\alpha = 97^{\circ}\,39'$, $\beta = 106^{\circ}\,49'$, $\gamma = 77^{\circ}\,37'$, wenn die entsprechende Aufstellung gewählt wird.

Die Kordinaten der Ecken, die wie die Flächen stets nur paarweise vorhanden sind, zeigt folgende Zusammenstellung:

Ecken	x	y	z
1) $a\,p\,o$	1	$\frac{1}{2}$	0
2) $p\,o\,o'$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
3) $o'\,p\,b$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
4) $p\,b\,q$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{7}{3}$
5) $b\,q\,o$	0	1	$\frac{7}{3}$
6) $q\,o\,c$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{2}$
7) $o\,c\,q'$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
8) $q'\,q''\,o$	$\frac{1}{2}$	0	2
9) $q''\,o\,o'$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$
10) $q\,c\,p$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{2}$
11) $c\,p\,a$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
12) $a\,q'\,p'$	1	0	2
13) $a\,p'\,o$	1	0	$-\frac{1}{2}$

Eine Hemiedrie des triklinen Systems, welche darin besteht, dass alle Flächen statt paarweise einzeln auftreten oder doch bei gleichzeitigem Auftreten der parallelen Fläche verschiedene Beschaffenheit haben, ist an Mineralien bis jetzt nicht nachgewiesen, wohl aber am unterschwefligsauren Calcium, am sauren rechtsweinsauren Strontium und anderen organischen Verbindungen.

Bei Formen dieser Art verschwindet die letzte Spur von Symmetrie, welche bei den holoedrischen triklinen Krystallen noch darin zu finden ist, dass sie ein sog. Centrum der Symmetrie besitzen, d. h. dass bei gleicher Centraldistanz der Flächen mit gleichem Axenverhältnis der Schnittpunkt der Axen nicht bloss diese, sondern alle durch denselben gehende Geraden, welche zwei Punkte der Oberfläche verbinden, halbiert. Ein derartiges Centrum der Symmetrie besitzen alle holoedrischen Formen, dagegen fehlt es allen geneigtflächig-hemiedrischen und allen hemimorphen Formen.

§ 109. Uebersicht der Klassen nach den Symmetrieelementen. Mit Berücksichtigung der Holoedrie, Hemiedrie, Tetartoedrie und Hemimorphie kann man alle Formen in folgende 32 Klassen einteilen:

I. Reguläres System.

1. Holoëdrisch-reguläre Klasse mit 3 Hauptsymmetrieebenen (|| $\infty O \infty$) und 6 (gewöhnlichen) Nebensymmetrieebenen (|| ∞O). Die 3 Hauptaxen sind vierzählige, die 6 rhombischen Zwischenaxen zweizählige und die 4 trigonalen Zwischenaxen dreizählige Symmetrieaxen. Das Centrum der Symmetrie ist vorhanden.

2. Pentagonal-hemiedrische Klasse mit 3 Nebensymmetrieebenen (|| $\infty O \infty$). Die 3 Hauptaxen sind nur noch zweizählige, die rhombischen Zwischenaxen fallen als Symmetrieaxen weg, 4 dreizählige (trigonale) Axen und das Centrum der Symmetrie bleiben.

3. Tetraedrisch-hemiedrische Klasse mit 6 Nebensymmetrieebenen (|| ∞O). Die 3 Hauptaxen werden zweizählige Symmetrieaxen, die 4 dreizähligen (trigonalen) Axen bleiben, die rhombischen Zwischenaxen fallen als Symmetrieaxen weg, auch das Centrum der Symmetrie fehlt.

4. Plagiedrisch-hemiedrische Klasse ohne Symmetrieebene. Die Symmetrieaxen sind wie bei der holoedrischen Klasse. Das Centrum der Symmetrie fehlt.

5. Tetartoëdrische Klasse ohne Symmetrieebene. Die Symmetrieaxen sind wie in der tetraedrisch-hemiedrischen Klasse. Das Centrum der Symmetrie fehlt.

IIa. Hexagonales System.

6. Holoedrisch-hexagonale Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene (|| oP) und 6 Nebensymmetrieebenen (3 || ∞P und 3 || $\infty P2$). Die Hauptaxe ist eine sechszählige, die 3 Nebenaxen und die 3 Zwischenaxen zweizählige Symmetrieaxen. Das Centrum der Symmetrie ist vorhanden.

7. Hemimorph-holoedrische hexagonale Klasse mit 6 Nebensymmetrieebenen (3 || ∞P und 3 || $\infty P2$) und einer sechszähligen Symmetrieaxe (Hauptaxe). Die Hauptsymmetrieebene, die zweizähligen Symmetrieaxen und das Centrum der Symmetrie sind weggefallen.

8. Pyramidal-hemiedrische hexagonale Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene (|| oP), einer sechszähligen Symmetrieaxe und einem Centrum der Symmetrie.

9. Trapezoedrisch-hemiedrische hexagonale Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer sechszähligen (Hauptaxe) und 6 zweizähligen (Neben- und Zwischenaxen) Symmetrieaxen. Das Centrum der Symmetrie fehlt.

10. Hemimorph-hemiedrische hexagonale Klasse ohne Symmetrieebene und Centrum der Symmetrie, mit einer sechszähligen Symmetrieaxe.

IIb. Trigonales System.

11. Ditrigonal-pyramidal-hemiedrische Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene und 3 Nebensymmetrieebenen (|| ∞P), einer dreizähligen (Hauptaxe) und 3 zweizähligen Symmetrieaxen und einem Centrum der Symmetrie.

12. Rhomboedrisch-hemiedrische Klasse mit 3 Nebensymmetrieebenen (|| $\infty P2$), einer dreizähligen Symmetrieaxe (zugleich sechszählige Axe der zusammengesetzten Symmetrie), 3 zweizähligen Symmetrieaxen (Nebenaxen) und einem Centrum der Symmetrie.

13. Hemimorph-hemiedrische trigonale Klasse mit 3 Nebensymmetrieebenen (|| ∞P) und einer dreizähligen Symmetrieaxe, ohne Centrum der Symmetrie.

14. Trigonal-tetartoedrische Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene (|| oP) und einer dreizähligen Symmetrieaxe, ohne Centrum der Symmetrie.



15. Rhomboedrisch-tetartoedrische Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer dreizähligen Symmetrieaxe und einem Centrum der Symmetrie.

16. Trapezoedrisch-tetartoedrische Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer dreizähligen und 3 zweizähligen Symmetrieaxen, ohne Centrum der Symmetrie.

17. Hemimorph-tetartoedrische Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer dreizähligen Symmetrieaxe und ohne Centrum der Symmetrie.

III. Tetragonales System.

18. Holoedrische tetragonale Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene (|| oP), 4 Nebensymmetrieebenen (2 || ∞P und 2 || $\infty P \infty$), einer vierzähligen (Hauptaxe) und 4 zweizähligen (2 Nebenaxen und 2 Zwischenaxen) Symmetrieaxen und einem Centrum der Symmetrie.

19. Hemimorph-holoedrische tetragonale Klasse mit 4 Nebensymmetrieebenen (wie 18) und einer vierzähligen Symmetrieaxe, ohne Centrum der Symmetrie.

20. Pyramidal-hemiedrische tetragonale Klasse mit einer Hauptsymmetrieebene (|| oP), einer vierzähligen Symmetrieaxe und einem Centrum der Symmetrie.

21. Sphenoidisch-hemiedrische Klasse mit 2 Nebensymmetrieebenen (|| ∞P) und 3 zweizähligen Symmetrieaxen (die Hauptaxe und 2 Nebenaxen), ohne Centrum der Symmetrie.

22. Trapezoedrisch-hemiedrische tetragonale Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer vierzähligen (Hauptaxe) und 4 zweizähligen Symmetrieaxen (2 Nebenaxen und 2 Zwischenaxen).

23. Hemimorph-hemiedrische tetragonale Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer vierzähligen Symmetrieaxe, ohne Centrum der Symmetrie.

24. Tetartoedrisch-tetragonale Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer zweizähligen Symmetrieaxe (Hauptaxe), ohne Centrum der Symmetrie.

IV. Rhombisches System.

25. Holoedrisch-rhombische Klasse mit 3 verschiedenen Symmetrieebenen (Axenebenen) und 3 verschiedenen zweizähligen Symmetrieaxen (Axen) und einem Centrum der Symmetrie.

26. Hemimorph-rhombische Klasse mit 2 verschiedenen Symmetrieebenen und einer zweizähligen Symmetrieaxe, ohne Centrum der Symmetrie.

27. Hemiedrisch-rhombische Klasse ohne Symmetrieebene, mit 3 verschiedenen Symmetrieaxen, ohne Centrum der Symmetrie.

V. Monoklines System.

28. Holoedrisch-monokline Klasse mit einer Symmetrieebene (|| ∞P∞), einer zweizähligen Symmetrieaxe (Orthoaxe) und einem Centrum der Symmetrie.

29. Hemimorph-monokline Klasse ohne Symmetrieebene, mit einer zweizähligen Symmetrieaxe (Orthoaxe), ohne Centrum der Symmetrie.

30. Hemiedrisch-monokline Klasse mit einer Symmetrieebene (|| ∞P∞) ohne Symmetrieaxe und ohne Centrum der Symmetrie.

VI. Triklines System.

31. Holoedrisch-trikline Klasse ohne Symmetrieebenen und Symmetrieaxen mit einem Centrum der Symmetrie.

32. Hemiedrisch-trikline oder asymmetrische Klasse ohne alle Symmetrieelemente, auch ohne Centrum der Symmetrie.

XV. Kapitel.

Regelmässige Verwachsung von Krystallen.

§ 110. Parallele Verwachsung. Grössere Krystalle zeigen sich häufig aus kleinen Kryställchen (Subindividuen) in paralleler Stellung zusammengesetzt, und zwar sind diese letzteren von der gleichen Form, wie die ersteren oder auch von anderer Form. Grössere Rhomboeder von Eisenspat, Manganspat, Kalkspat sind oft zusammengesetzt aus Subindividuen derselben Form. Sind die letzteren nicht in vollkommen paralleler Stellung, so erscheinen sattelförmig gekrümmte Flächen und kugelige Formen (Sphaerosiderit) oder garbenähnliche Gestalten (Manganspat). In anderen Fällen zeigen die Subindividuen auch andere Gestalt, so sind z. B. Fluss-

spatoktaeder zusammengesetzt aus kleinen Würfeln (Zinnwald) und die Beschaffenheit der Oktaederflächen, die im Gegensatz zu den glatten Würfelflächen an diesem Mineral stets rauh sind, rührt von dieser Zusammensetzung aus kleinen Würfeln, deren Ecken auf den Oktaederflächen vorstehen, her.

§ 111. Symmetrische Verwachsung zweier Krystalle. Zwillinge. Zwei Krystalle sind häufig mit einander derart regelmässig verwachsen, dass sie eine Krystallfläche gemein haben und zu dieser symmetrisch liegen. Die Krystallfläche, die dabei zur Symmetrieebene wird, was sie vorher nicht war, muss dabei an den Krystallen selbst gar nicht als Fläche vorhanden sein. Dieses Gesetz der symmetrischen Verwachsung (Zwillingsgesetz), lässt sich auch so aussprechen: Von zwei Krystallen, die ursprünglich in paralleler Stellung zu denken sind, ist der eine um eine Axe (Zwillingsaxe), welche auf einer Krystallfläche (Zwillingsebene) senkrecht steht, um 180° zu drehen. Die Zwillingsebene ist stets eine krystallographisch-mögliche Ebene (mit rationalen Ableitungszahlen) oder eine zu einer möglichen Kante, welche Zwillingsaxe ist, senkrechte Ebene.

§ 112. Spinellgesetz. An Magneteisen und anderen Spinellen finden sich häufig Zwillinge, wie Fig. 145, bei denen zwei Oktaeder nach dem Gesetz, Zwillingsebene eine Oktaederfläche,

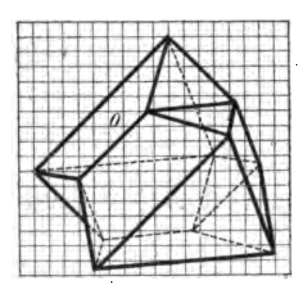


Fig. 145.

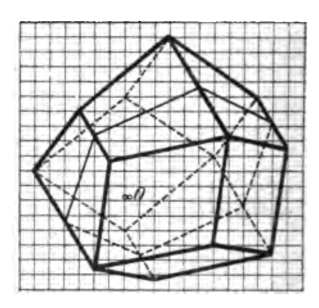


Fig. 146.

Zwillingsaxe eine trigonale Axe, verwachsen sind. Denke man sich ein Oktaeder, wie in Fig. 80, mitten durchschnitten durch die zu der Oktaederfläche (vorn, rechts, unten) parallele Zwillingsebene und die vordere Hälfte um 180° gedreht, so wird die Mitte des Dreiecks (rechts, unten) als der Endpunkt der trigonalen Axe ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$) und ebenso die Höhen des Dreicks, ihre Lage beibehalten, während die Ecken auf die entgegengesetzte Seite in gleichen Abstand von der

Mitte kommen. Es entstehen hierbei Gestalten mit „einspringenden“ Winkeln, an denen sie sich als Zwillinge erkennen lassen. Doch zeigen nicht alle Zwillinge derartige einspringende Winkel. Haben die beiden verwachsenen Krystalle die Form des Dodekaders ∞O, so entstehen nach demselben Gesetz Zwillinge ohne einspringende Winkel, Fig. 146. Die Verwachsungsfläche zeigt auch in diesem Fall die Gestalt eines regelmässigen Sechsecks, und schneidet von den 6 zu der als Zwillingsaxe auftretenden trigonalen Axe parallelen Kanten abwechselnd $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ ihrer Länge ab. Nach der Drehung entstehen dann 6 Trapeze mit längeren Grundlinien, welche $\frac{4}{3}$ der Länge und kürzeren, welche $\frac{2}{3}$ der Länge der Dodekaederkanten

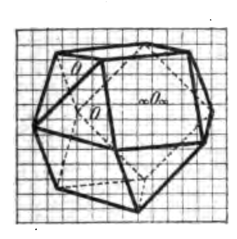


Fig. 147.

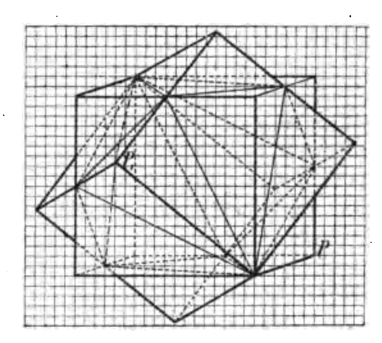


Fig. 148.

haben. Wären die Dodekaederflächen etwa längs der längeren Diagonale gestreift, so würden diese Trapeze federartig gestreift erscheinen. Die Seiten des Sechsecks treten auch ohne derartige Streifung als sog. „Zwillingsnaht“ oft deutlich hervor. (Zinkblende).

Man findet die Ecken des Krystalls in der Zwischenstellung, indem man die Kanten des Dodekaeders abwechselnd um $\frac{1}{3}$ verlängert oder verkürzt, was sehr leicht geht, da jede Kante durch die vertikalen Linien des quadrierten Papiers in 3 gleiche Teile geteilt wird.

Haben die Einzelkrystalle die Form des Mittelkrystalls $O, \infty O \infty$ Fig. 86, so zeigen die Zwillinge (Fig. 147) ebenfalls keine einspringenden Winkel. (Bleiglanz).

Fig. 147 wird von Fig. 145 abgeleitet, indem man die Mitten der nicht durchschnittenen Oktaederkanten mit je zwei Ecken der Zwillingsebene verbindet.

Während die in den Figuren 145, 146 und 147 dargestellten Zwillinge sog. Berührungszwillinge (Kontaktzwillinge) darstellen, bei denen die beiden Einzelkrystalle an der Zwillingsebene verwachsen sind und daran endigen, ist in Fig. 148 ein sog. Durchkreuzungs-

zwilling dargestellt, bei dem die beiden Würfel nach dem Spinellgesetz verwachsen sind, d. h. eine Oktaederfläche und die zugehörige trigonale Axe gemein haben, bei dem aber der eine Krystall durch den anderen gleichsam hindurch gewachsen ist, sodass über jeder Fläche des einen Krystalls eine Ecke des anderen hervorragt. (Flussspat).

Nur ganz ausnahmsweise zeigen natürliche Krystalle, solche modellähnliche Gestalten, gewöhnlich sieht man dagegen auf grösseren Krystallen kleinere in dieser Zwillingsstellung aufgewachsen, und die Ecken derselben aus den Flächen jener hervorragen.

Die Lage der Ecken des Krystalls in der Zwillingsstellung (in Fig. 148) findet man ganz ähnlich wie in Fig. 145, indem man sich die Ecken als Eckpunkte gleichseitiger Dreiecke (Tetraederflächen) um die Endpunkte der trigonalen Zwillingsaxe mit den Koordinaten $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ und $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ in gleichem Abstand herumgedreht denkt. Punkt P, der von diesem Eckpunkt 10 nach rechts und $4^2/_3$ nach unten liegt, kommt dabei nach P', der von demselben Punkt 10 Quadratseiten links und $4^2/_3$ nach oben liegt. Ist übrigens die Lage einer Ecke bestimmt, so ergiebt sich die der übrigen, indem man von ihr aus die Kanten durch die Mitte der Kanten des Würfels in der normalen Stellung zieht und über die Schnittpunkte um die gleiche Länge verlängert und die Parallelogramme fertig konstruiert.

§ 113. Zwillinge von hemiedrischen Krystallen. Da nach dem allgemeinen Zwillingsgesetz die Zwillingsebene eine Symmetrieebene nicht sein kann, so sind im regulären System Zwillinge, bei denen die Zwillingsebene eine Würfelfläche oder Rhombendodekaederfläche wäre, an holoedrischen Krystallen unmöglich. Da aber bei der tetraedrischen Hemiedrie die Hauptsymmetrieebenen als solche wegfallen, so sind bei tetraedrischen Krystallen auch Zwillinge möglich, bei denen die Zwillingsebene eine Würfelfläche ist. Denkt man sich (Fig. 149) ein Tetraeder $+\frac{O}{2}$ etwa um die von links nach rechts gehende Hauptaxe um 180^0 gedreht, so kommt die obere horizontale Kante unten in die Lage einer Kante des Gegentetraeders $-\frac{O}{2}$, und das gleiche geschieht mit allen übrigen Kanten des Tetraeders. Die Gestalt, welche aussieht wie zwei Tetraeder in Gegenstellung, welche sich durchdringen, ist also aufzufassen als ein Durchkreuzungszwilling zweier gleichen Tetraeder, wobei eine Würfelfläche Zwillingsebene ist. Die Kanten an den einspringenden Winkeln sind die Kanten des Oktaeders, auf dessen Flächen je ein Tetraeder aufzusitzen scheint. Denkt man sich die Ecken derselben

stark abgestumpft, so erhält man Zwillinge der Kombination $+\frac{O}{2}$, $-\frac{O}{2}$ (Fig. 114), bei denen die einspringenden Winkel nur wie schmale Einkerbungen an Stelle der Kanten des Oktaeders erscheinen (Diamant).

Fig. 150 erscheint wie eine Durchdringung zweier Pentagondodekaeder $+\frac{\infty O 2}{2}$, $-\frac{\infty O 2}{2}$, ist aber aufzufassen als ein Zwilling von zwei Pentagondodekaedern gleicher Stellung, welche eine Fläche des Rhombendodekaeders ∞O als Zwillingsebene gemeinsam

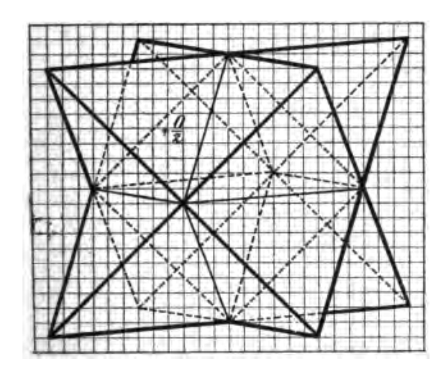


Fig. 149.

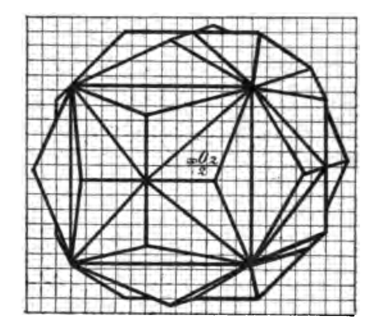


Fig. 150.

haben und um die zugehörige rhombische Axe als Zwillingsaxe gegen einander um 180° verdreht sind. Während bei dem einzelnen Pentagondodekaeder, wie überhaupt bei pentagonal-hemiedrischen Formen, die gewöhnlichen Symmetrieebenen ($\| \infty O$) in Wegfall kommen, treten sie bei diesen Zwillingen wieder als solche auf, sodass auch bei diesen, wie bei den vorher besprochenen Zwillingen der tetraedrisch-hemiedrischen Formen, der Grad der Symmetrie wieder derselbe ist, wie bei den holoedrischen Formen. Zwillinge wie in Fig. 150, oft noch mit Abstumpfung der längeren pentagonalen Kanten durch $\infty O \infty$, zeigt häufig der Eisenkies. Man nennt dieselben auch wohl Zwillinge des eisernen Kreuzes. Die Kanten in den einspringenden Winkeln sind die Kanten des Pyramidenwürfels.

§ 114. **Hexagonale Zwillinge.** Als Beispiel eines Zwillingsgesetzes im hexagonalen System möge das nur an hemiedrischen Krystallen mögliche und am Kalkspat häufige Gesetz dienen, wonach die Basis Zwillingsebene und die Hauptaxe Zwillingsaxe ist. Fig. 151

zeigt zwei symmetrisch zur Basis verwachsene Skalenoeder des Kalkspats, das untere in der Stellung von $-R_3$ (Fig. 55), das obere in der Stellung von $+R_3$ (Fig. 58). Die Verwachsungsfläche ist das Zwölfeck, welches den basischen Hauptschnitt der holoedrischen Form $3\,P\,\frac{3}{2}$ darstellt. (Fig. 29 im halben Massstab). In Fig. 153 sind zwei Rhomboeder, welche nach demselben Gesetz mit einander verwachsen sind. Die Verwachsungsfläche ist in diesem Fall der basische Hauptschnitt der Pyramiden erster Ordnung. Derartige

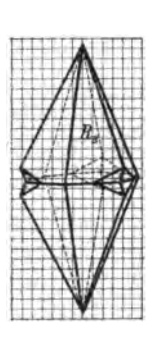


Fig. 151.

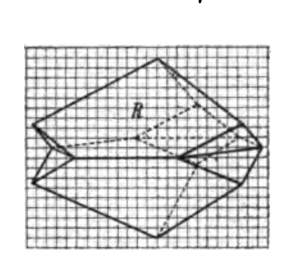


Fig. 152.

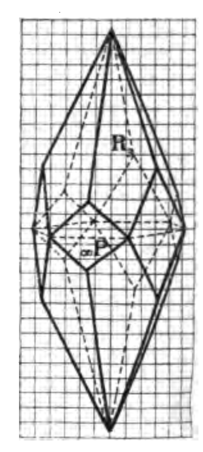


Fig. 153.

Zwillinge lassen sich öfters an Spaltungsstücken (Auerbach a. d. Bergstrasse) beobachten, bei weiterem Abspalten verschwinden die einspringenden Winkel und man erhält eine scheinbar trigonale Pyramide.

Bei Kombinationen mit Prismen entstehen, da diese bei der rhomboedrischen Hemiedrie unverändert bleiben, keine einspringenden Winkel, und lässt sich dann der Zwillingscharakter ausser an der meist sichtbaren Zwillingsnaht nur daran erkennen, dass die gleichartigen Polkanten der Skalenoeder und die der Rhomboeder einander gegenüberliegen. Dies zeigt der in Fig. 153 dargestellte Zwilling der Kombination ∞P, R_3 (vergl. § 95).

§ 115. **Lage der Ecken der Krystalle in der Zwillingsstellung.**

a) **Punkte auf der Zwillingsebene.** Ist die Zwillingsebene, wie in den bisher besprochenen Zwillingen eine zu einer Krystallfläche parallele Ebene, welche durch die Mitte des Krystalls, also

den Schnittpunkt O der Axen geht, so ändern bei einer Drehung um 180° die Koordinaten aller in diese Ebene fallenden Punkte nur ihre Vorzeichen, der Punkt O, um den die Drehung erfolgt, behält allein seine Lage bei.

b) Punkte auf der Zwillingsaxe. Die Zwillingsaxe ist der geometrische Ort aller Punkte, welche bei der Drehung ihre Lage nicht ändern, es ist die gerade Linie, welche auf der Krystallfläche, zu der die Zwillingsebene parallel ist, senkrecht steht.

c) Punkte ausserhalb der Zwillingsebene ändern bei der Drehung weder ihren Abstand von der Zwillingsebene noch von der Zwillingsaxe, oder, was dasselbe ist, von dem Punkt, in dem die Zwillingsaxe die zu der Zwillingsebene parallele Fläche trifft.

Unter der Voraussetzung rechtwinkliger Axen und Koordinaten lässt sich der Abstand $\varrho = OF$ einer beliebigen Fläche ABC vom Schnittpunkt der Axen wie folgt berechnen: F ist (Fig. 154) der Schnittpunkt der 3 Höhen von ABC, OF die Schnittlinie der 3 zu den Axenebenen senkrechten Ebenen OAS, OBT und OCR, in welche auch die Koordinaten x, y und z fallen.*)

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OFR und OCR folgt

$$OF : OR = OC : CR \text{ also } OF = \frac{OR \,.\, OC}{CR}.$$

Aus der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke OAR und OAB folgt ebenso $OR : OA = OB : AB$; setzt man hierfür die Werte ein, so erhält man

$$OR = \frac{OA \,.\, OB}{AB} = \frac{a\,b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ und, da}$$

$$CR^2 = OR^2 + c^2 = \frac{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}{a^2 + b^2},$$

so findet man $$OF^2 = \frac{OR^2 \,.\, c^2}{CR^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \quad 1)$$

$$\text{und } OF = \frac{a\,b\,c}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \varrho.$$

---

*) Errichtet man $OR \perp AB$, so ist AB senkrecht zur Ebene COR, denn es steht senkrecht auf OR und NR der Parallelen zu OC in der Ebene COR, die wie OC auf der Ebene ABO und also auch auf allen in der Ebene durch ihren Fusspunkt R gezogenen Geraden senkrecht steht. Ist aber AB senkrecht zur Ebene COR, so ist es auch senkrecht auf der Geraden CR und diese also eine Höhe des Dreiecks ABC. Dasselbe gilt für AS und BT, wenn $OS \perp BC$ und $OT \perp AC$. Da die Ebenen COR, AOS und BOT auf der Ebene ABC als Neigungsebenen dieser Ebene zu den Axenebenen senkrecht stehen, so steht auch ihr Durchschnitt OF auf ABC senkrecht.



Die Höhen der ähnlichen Dreiecke OFR und OCR verhalten sich wie die Grundlinien, also ist

$$z : OF = OR : CR \text{ oder } z = \frac{OF \cdot OR}{CR} \text{ und, da}$$

$$OF = \frac{OR \cdot OC}{CR} \text{ ist, } z = \frac{OR^2 \cdot c}{CR^2} \text{ und nach Gleichung 1)}$$

$= \frac{OF^2}{c} = \frac{\varrho^2}{c}$. Auf gleiche Weise findet man $x = \frac{\varrho^2}{a}$ und $y = \frac{\varrho^2}{b}$.

Jedem Punkt auf der Ebene ABC entspricht ein Punkt auf der Zwillingsebene, den man findet, wenn man von ihm eine Senkrechte auf diese fällt. Die Differenz der Koordinaten dieser einander entsprechenden Punkte ist für

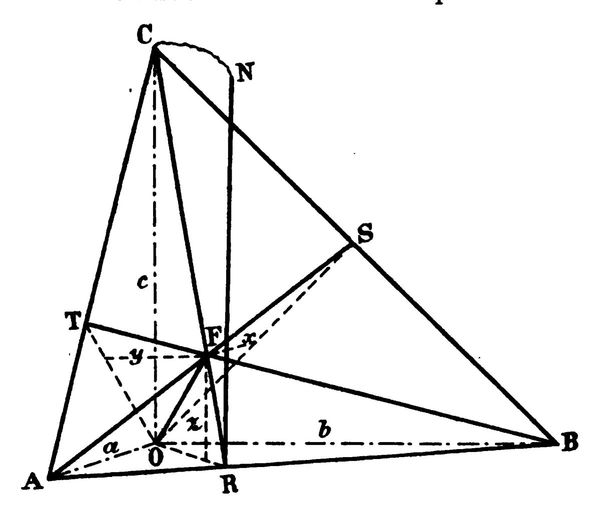


Fig. 154.

alle Punkte derselben Ebene gleich den Koordinaten des Punktes F auf der Zwillingsaxe. Hat ein beliebiger Punkt P im Raume die Koordinaten x, y, z, so lässt sich durch ihn eine Ebene parallel zu ABC legen, welche die Centraldistanz d hat. Der in diese Ebene fallende Punkt auf der Zwillingsaxe hat dann die Koordinaten $\frac{d \cdot \varrho^2}{a}$, $\frac{d \cdot \varrho^2}{b}$, $\frac{d \cdot \varrho^2}{c}$. Die Koordinaten des entsprechenden Punktes auf der Zwillingsebene sind dann

$$x_0 = x - \frac{d \cdot \varrho^2}{a},\ y_0 = y - \frac{d \cdot \varrho^2}{b},\ z_0 = z - \frac{d \cdot \varrho^2}{c}.$$

Der Punkt P hat sich mitgedreht, ohne dass sich sein Abstand von der Zwillingsebene geändert hat, und seine Koordinaten sind vor wie nach um die Koordinaten des Punktes auf der Zwillingsaxe grösser, als die des entsprechenden Punktes auf der Zwillingsebene, also

$$x_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{a} - x,\ y_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{b} - y,\ z_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{c} - z.$$

ϱ^2 ist für alle Punkte gleich, d dagegen für die verschiedenen Punkte im all-

gemeinen verschieden, und nur für die Punkte gleich, welche in derselben zu der Fläche ABC parallelen Ebene liegen, und wird gefunden aus der Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = d \text{ (vergl. § 4),}$$

wobei x, y, z die Koordinaten des Punktes P und a, b, c die Parameter der Krystallfläche sind, mit welcher die Zwillingsebene parallel ist.

Beispiel. Spinellgesetz. Fig. 145 Zwillingsebene parallel $A_1 B_1 C_{-1}$, also $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$. $\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = \frac{1}{3}$. Die Zwillingsebene geht durch die Mitte von 6 Oktaederkanten, der Punkt $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ fällt zusammen mit $\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Die Endpunkte der Axen A_1, B_1, C_1 verändern hre Lage, d ist in diesem Fall gleich 1. Der Punkt $A_1 = (1, 0, 0)$ bekommt die Koordinaten $x_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{a} - x = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$, $y_1 = \frac{2}{3}$, $z_1 = -\frac{2}{3}$. $B_1 = (0, 1, 0)$ wird $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $C_1 = (0, 0, -1)$ wird $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Punkt P in Fig. 148 $= (-1, 1, -1)$ gelangt bei der Deckung nach $P_1 = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

§ 116. Tetragonale Zwillinge.

Als Beispiel eines Zwillingsgesetzes im tetragonalen System möge das, wonach die am Zinnerz (und Rutil) sehr häufig auftretenden Zwillinge gebildet sind, dienen. Zwillingsebene ist hierbei eine Fläche der Pyramide zweiter Ordnung $P\infty$. Fig. 155 zeigt einen Krystall von der Kombination ∞P (1), $\infty P \infty$ $\left(\frac{5}{6}\right)$, P (2), $P\infty$ $\left(\frac{11}{6}\right)$ $a : c = 1 : 0{,}66\bar{6}$ (vergl. Fig. 129) durch die Zwillingsebene mitten durchschnitten, und die untere Hälfte um 180° gedreht.

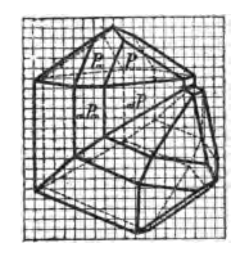


Fig. 155.

Die einfache Form zeigt drei Arten von Ecken $\left(0, 0, \frac{11}{6} c\right)$, $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, c\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{5}{3} c\right)$. Die Zwillingsebene $A\infty\, B_1\, C_{-1}$ in der Centraldistanz 0 schneidet die Prismenflächen in den Punkten $\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} c\right)$, $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} c\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} c\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{5}{6} c\right)$ und den entgegengesetzten Punkten, in deren Lage diese Punkte bei der Umdrehung kommen $\left(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{6} c\right)$, $\left(-\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} c\right)$, $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}, -\frac{5}{6} c\right)$, $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{6} c\right)$.

In der Formel $\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$ hat man, da $A\infty\, B_1\, C_{-1}$ $(d = 0)$ Zwillingsebene und $a : b : c = 1 : 1 : \frac{2}{3}$ ist, $a = \infty$, $b = 1$,

$c = -\frac{2}{3}$ zu setzen und erhält dann $\varrho^2 = \frac{1}{0+1+\frac{9}{4}} = \frac{4}{13}$. In der folgenden Tabelle sind unter x, y, z die Koordinaten der Ecken vor der Drehung, unter x_1, y_1, z_1 die Koordinaten derselben nach der Drehung, unter d die Centraldistanz der durch die Ecke gelegten Fläche $A_\infty B_1 C_{-1}$ eingetragen.

d	x	y	z	x_1	y_1	z_1
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-c$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{73}{78}$	$\frac{20}{39}$
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-c$	$\frac{1}{6}$	$\frac{73}{78}$	$\frac{20}{39}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-c$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{53}{78}$	$-\frac{4}{39}$
$\frac{5}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-c$	$\frac{5}{6}$	$\frac{53}{78}$	$-\frac{4}{39}$
$\frac{7}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-c$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{43}{78}$	$-\frac{16}{39}$
$\frac{7}{6}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-c$	$\frac{5}{6}$	$\frac{43}{78}$	$-\frac{16}{39}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}c$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{85}{78}$	$-\frac{32}{117}$
$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}c$	$\frac{1}{6}$	$\frac{85}{78}$	$-\frac{32}{117}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-c$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{23}{78}$	$-\frac{40}{39}$
$\frac{11}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$-c$	$\frac{1}{6}$	$\frac{23}{78}$	$-\frac{40}{39}$
$\frac{11}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}c$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{25}{26}$	$-\frac{68}{117}$
$\frac{11}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{3}c$	$\frac{1}{6}$	$\frac{25}{26}$	$-\frac{68}{117}$
$\frac{11}{6}$	0	0	$-\frac{11}{6}c$	0	$\frac{44}{39}$	$-\frac{55}{117}$

In Fig. 156 ist ein Zwilling nach demselben Gesetz, wie Fig. 155 dargestellt, doch geht hier die Zwillingsebene nicht durch die Mitte eines Krystalls, sondern die Verwachsungsfläche ist eine zu $A_\infty B_1 C_{-1}$, parallele Fläche in der Centraldistanz $\frac{3}{2}$. Die Figur zeigt die beiden Krystalle vor der Drehung (mit parallelen Axen, punktiert) und nach der Drehung.

Denkt man sich das Axenkreuz so verschoben, dass der Schnittpunkt desselben in die Mitte der Verwachsungsfläche fällt, so ändern sich die Koordinaten aller Punkte um die Koordinaten dieses Punktes, also in diesem Fall um $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -\frac{7}{6}c$, es bekommt also z. B. die untere Polecke $(0, 0, -\frac{11}{6}c)$ die

Koordinaten $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$, $z = -3c$, und nach der Umdrehung die Koordinaten $x_1 = 0$,

$$y_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{b} - y = \frac{2 \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{13}}{1} - \frac{1}{3} = \frac{67}{39},$$

$$z_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{c} - z = -\frac{2 \cdot 3 \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{13}}{\frac{2}{3}} + 3 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{14}{13}.$$

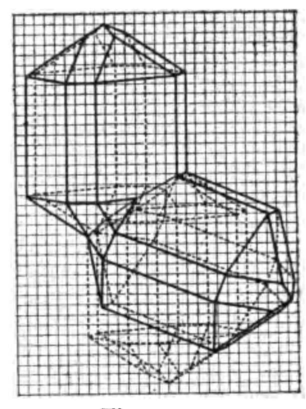


Fig. 156.

§ 117. **Rhombische Zwillinge.** Der in Fig. 157 dargestellte Zwilling des **Aragonits** zeigt als Zwillingsebene eine Fläche parallel ∞P (A_{-1} B_1 C_∞). Die Kombination ist $\infty P(1)$, $\breve{P}\infty(1)$, $\infty \breve{P} \infty (\frac{1}{3})$ bei dem Axenverhältnis $a:b:c = 0{,}66\bar{6} : 1 : 0{,}73\bar{3}$ (statt $0{,}6228 : 1 : 0{,}7207$).

Die Punkte auf der Zwillingsebene haben die Koordinaten $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{2}{3}$, die man für den Schnittpunkt von A_∞ B_1 C_∞ ($d_1 = \frac{1}{3}$), A_{-1} B_1 C_∞ ($d_2 = 0$) und A_∞ B_1 C_1 ($d_3 = -1$) berechnet; daraus erhält man durch Vertauschung die drei anderen Punkte $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Zur Zeichnung des Zwillings genügt die Bestimmung der Lage von 3 Punkten.

$$a = -\frac{2}{3}, \; b = 1, \; c = \infty, \; \varrho^2 = \frac{1}{\frac{9}{4} + 1} = \frac{4}{13}.$$

d	x	y	z	x_1	y_1	z_1
1	$-a$	0	c	$-\frac{10}{39}$	$\frac{8}{13}$	$-c$
1	$-\frac{2}{3}a$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}c$	$-\frac{56}{117}$	$\frac{11}{39}$	$-\frac{2}{3}c$
$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}a$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}c$	$\frac{16}{117}$	$\frac{7}{13}$	$-\frac{2}{3}c$

Die Zwillingsbildung nach diesem Gesetz ist häufig eine wiederholte; indem eine Fläche mit grösserer Centraldistanz als zweite Zwillingsebene auftritt, entsteht zwischen dieser und der ersten eine „Zwillingslamelle“, deren Dicke der Differenz der Centraldistanzen der beiden Flächen entspricht. Oft sind mehrere solche Zwillingslamellen vorhanden; sind dieselben sehr dünn, so zeigt sich diese wiederholte Zwillingsbildung nur in einer Streifung der Domenflächen parallel einer Kombinationskante mit dem Prisma.

Als einfaches Beispiel eines Durchkreuzungszwillings kann der in Fig. 158 dargestellte Zwilling des **Arsenkieses** dienen, der zwei Krystalle der Kombination $\infty P(1)$, $\frac{1}{4}\breve{P}\infty$ (1) (gestreift) parallel $\bar{P}\infty$ ($A_{-1}\, B_{\infty}\, C_1$) verwachsen zeigt.

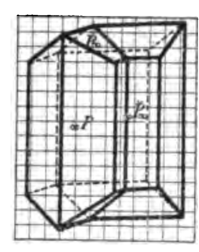


Fig. 157.

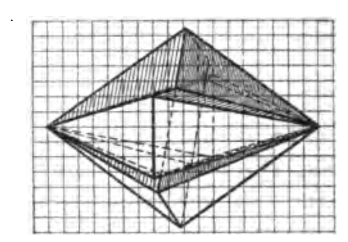


Fig. 158.

Das Axenverhältnis ist $a:b:c = 0{,}666\bar{6}:1:1{,}183\bar{3}$ (statt 0,6851 : 1 : 1,1859). Der Punkt $\left(a,\ 0,\ \frac{1}{4}c\right)$ bei dem $d = -\frac{3}{4}$ erhält die Koordinaten $\left(\frac{17}{195},\ 0,\ -\frac{1127}{1560}\right)$, und der Punkt $\left(a,\ 0,\ -\frac{1}{4}c\right)$, für welchen $d = -\frac{5}{4}$, wird zu dem Punkt $\left(\frac{23}{39},\ 0,\ -\frac{133}{312}\right)$; $\varrho^2 = \frac{196}{585}$.

Am **Staurolith** finden sich Zwillinge, bei denen sich die einzelnen Krystalle unter rechtem Winkel zu kreuzen scheinen (Fig. 159). In Wirklichkeit sind es Zwillinge nach einer Fläche des Brachydomes $\frac{3}{2}\breve{P}\infty$; da aber das Axenverhältnis der Grundform des Stauroliths $a:b:c = 0{,}4803:1:0{,}6761$ ist, also $b:c$ fast $1:\frac{2}{3}$, so vertauschen sich bei der Drehung nur die Axen b und c, woraus sich die Zeichnung derartiger Zwillinge von selbst ergiebt.

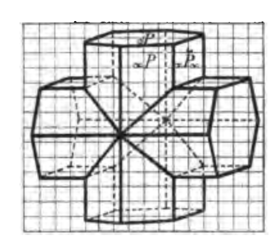


Fig. 159.

An der Kombination $\infty P(1)$, $\infty\breve{P}\infty\ (\frac{1}{3})$, $0P(1)$ sind nur zwei Arten von Ecken (1, 0, 1) und $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1)$, nach der Umdrehung (1, 1, 0) und $(-\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3})$. Die Kanten, in denen sich die beiden Krystalle schneiden, begrenzen zwei Sechsecke, welche den Domenflächen $\frac{3}{2}\breve{P}\infty$ (0) entsprechen. ($a:b:c$ ist gleich $0{,}5:1:0{,}66\bar{6}$ angenommen).

§ 118. **Lage der Flächen der Krystalle in der Zwillingsstellung.** Ist die Lage der Ecken der Krystalle in der Zwillingsstellung bestimmt, so kann man aus den Koordinaten von drei in einer Ebene liegenden Punkten auch das Axenverhältnis dieser Ebene berechnen.

Ist $a : b : c$ das Axenverhältnis der Grundform, so hat eine Ecke im allgemeinen die Koordinaten xa, yb, zc. Liegen drei Punkte P_1 ($x_1 a$, $y_1 b$, $z_1 c$), P_2 ($x_2 a$, $y_2 b$, $z_2 c$) und P_3 ($x_3 a$, $y_3 b$, $z_3 c$) in einer Ebene $A_p B_q C_r$, so gelten folgende drei Gleichungen (vergl. § 54):

$$\frac{x_1 a}{pa} + \frac{y_1 b}{qb} + \frac{z_1 c}{rc} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{p} \cdot x_1 + \frac{1}{q} \cdot y_1 + \frac{1}{r} z_1 = 1$$

$$\text{und} \quad \frac{1}{p} \cdot x_2 + \frac{1}{q} \cdot y_2 + \frac{1}{r} z_2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{p} \cdot x_3 + \frac{1}{q} \cdot y_3 + \frac{1}{z} z_3 = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt:

$$\frac{1}{p} = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3}{x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3}, \quad \frac{1}{q} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{\Sigma \pm x_1 y_2 z_3}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}{\Sigma \pm x_1 y_2 z_3},$$

wobei ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Subdeterminanten von x_1, x_2, x_3, η_1, η_2, η_3 die Subdeterminanten von y_1, y_2, y_3 und $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ die von z_1, z_2, z_3 in der aus den Koordinaten der drei Punkte gebildeten Determinante sind. Da $n = \frac{p}{q}$ und $m = \frac{r}{q}$ gesetzt werden kann, so folgt daraus:

$$n = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3} \quad \text{und} \quad m = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3}{\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3}.$$

Da diese Werte für n und m rationale Zahlen sind, so ist damit der Satz bewiesen, dass an symmetrischen Zwillingen jede mögliche Fläche des einen Krystalls auch eine mögliche Fläche an dem Krystall in der Zwillingsstellung ist.

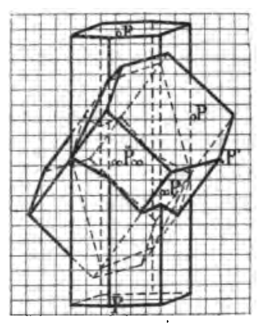


Fig. 160.

Als Beispiel möge der in Fig. 160 abgebildete Zwilling des Stauroliths dienen, bei dem die Fläche $A_{3/2} B_1 C_{-3/2}$ der Brachypyramide $\frac{3}{2} \breve{P} \frac{3}{2}$ Zwillingsebene ist. Die Kombination ist ∞P (1), $\infty \breve{P} \infty$ ($\frac{1}{3}$), $o P$ ($\frac{3}{2}$), das Axenverhältnis $a : b : c = 0{,}5 : 1 : 0{,}66\bar{6}$.

Ist die Zwillingsfläche statt ABC $A_n B_1 C_m$, so ist die Formel für ϱ^2 (§ 115) entsprechend umzugestalten in $\varrho^2 = \frac{1}{\frac{1}{n^2 a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{m^2 c^2}}$. Die Koordinaten von F sind $\frac{\varrho^2}{na}$, $\frac{\varrho^2}{b}$, $\frac{\varrho^2}{mc}$.

Sind xa, yb, zc die Koordinaten eines Punktes P auf der zu $A_n B_1 C_m$ parallelen Ebene mit der Centraldistanz d, so sind die Koordinaten des Punktes P_1 nach der Drehung:

$$x_1 a = \frac{2d \cdot \varrho^2}{na} - xa, \quad \text{also} \quad x_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{na^2} - x$$

$$y_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{b^2} - y_1 \;(b^2 = 1), \quad z_1 = \frac{2d \cdot \varrho^2}{mc^2} - z.$$

Der Punkt P (Fig. 160) hat die Koordinaten $xa = 1a$, $yb = 0$, $zc = -\frac{3}{2}c$, $\frac{xa}{na} + \frac{yb}{b} + \frac{zc}{mc} = d$ oder $\frac{x}{n} + y + \frac{z}{m} = d$ ist die Formel zur Berechnung der Centraldistanz d, sie ist für den Punkt $P = \frac{1}{\frac{3}{2}} + 0 + \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$;

$$\varrho^2 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4}} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\frac{9}{4}\cdot\frac{4}{9}}} = \frac{9}{34}.$$ Daher ist $x_1 = \frac{23}{17}$, $y_1 = \frac{15}{17}$, $z_1 = \frac{3}{17}$.

Die folgende Tabelle giebt die Koordinaten der 6 Ecken der unteren Basisfläche vor und nach der Drehung und die Centraldistanzen. Bei Umkehrung aller Vorzeichen erhält man die 6 anderen Punkte.

	d	x	y	z	x_1	y_1	z_1
1.	$\frac{5}{3}$	1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{23}{17}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{3}{17}$
2.	$\frac{16}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{94}{51}$	$\frac{31}{51}$	$\frac{3}{34}$
3.	$\frac{10}{9}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{46}{51}$	$\frac{47}{51}$	$\frac{21}{34}$
4.	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{98}{51}$	$\frac{7}{51}$	$\frac{27}{34}$
5.	$\frac{2}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{50}{51}$	$\frac{23}{51}$	$\frac{45}{34}$
6.	$\frac{1}{3}$	-1	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{25}{17}$	$\frac{3}{17}$	$\frac{21}{17}$

Aus den Koordinaten von je drei Punkten kann man nun die Parameter der Fläche bestimmen, in welche sie fallen. Die rechte Brachypinakoidfläche enthält die Punkte 2, 4 und den entgegengesetzten Punkt zu 3. Die Determinante der Koordinaten heisst:

$$\begin{vmatrix} \frac{94}{51} & \frac{31}{51} & \frac{3}{34} \\ \frac{98}{51} & \frac{7}{51} & \frac{27}{34} \\ -\frac{46}{51} & -\frac{47}{51} & -\frac{21}{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{188}{102} & \frac{62}{102} & \frac{9}{102} \\ \frac{196}{102} & \frac{14}{102} & \frac{81}{102} \\ -\frac{92}{102} & -\frac{94}{102} & -\frac{63}{102} \end{vmatrix}$$

Da die gleichen Nenner der Brüche in den Ausdrücken für n und m sich wegheben lassen, so braucht man nur die Determinante aus den Zählern zu bilden und deren Subdeterminanten zu suchen, welche heissen:

$$\xi_1 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 14 & 81 \\ -94 & -63 \end{vmatrix},\quad \xi_2 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} -94 & -63 \\ 62 & 9 \end{vmatrix},\quad \xi_3 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 62 & 9 \\ 14 & 81 \end{vmatrix}$$

$$\eta_1 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 81 & 196 \\ -63 & -92 \end{vmatrix},\quad \eta_2 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} -63 & -92 \\ 9 & 188 \end{vmatrix},\quad \eta_3 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 9 & 188 \\ 81 & 196 \end{vmatrix}$$

$$\zeta_1 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 196 & 14 \\ -92 & -94 \end{vmatrix},\quad \zeta_2 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} -92 & -94 \\ 188 & 62 \end{vmatrix},\quad \zeta_3 = \frac{1}{102^2}\cdot\begin{vmatrix} 188 & 62 \\ 196 & 14 \end{vmatrix}$$



Die Brachypinakoidfläche $A_\infty B_1 C_\infty$ hat sich in eine Fläche $A_p B_q C_r$ verwandelt, bei der $p:q:r = \frac{1}{\xi_1+\xi_2+\xi_3} : \frac{1}{\eta_1+\eta_2+\eta_3} : \frac{1}{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3} = \frac{1}{14688} : -\frac{1}{19584} : -\frac{1}{14688} = \frac{4}{3} : -1 : -\frac{4}{3}$, sie ist also die Fläche $A_{\frac{4}{3}} B_{-1} C_{-\frac{4}{3}}$ der Brachypyramide $\frac{4}{3}\breve{P}\frac{4}{3}$ geworden, ihre Centraldistanz ist aus den Koordinaten eines der drei Punkte zu berechnen mit Hilfe der Gleichung:

$$d = \frac{x_1}{n} + y_1 + \frac{z_1}{m} = \frac{94.3}{51.4} - \frac{31}{51} - \frac{3.3}{34.4} = \frac{17}{24}.$$

Auf gleiche Weise findet man durch Rechnung aus den Koordinaten der Punkte 1, 2 und den entgegengesetzten von 5, dass die Prismenfläche $A_1 B_1 C_\infty$ sich in $A_{\frac{16}{5}} B_1 C_{-\frac{8}{11}}$, eine Fläche der Brachypyramide $\frac{8}{11}\breve{P}\frac{16}{5}$ in der Zentraldistanz $\frac{17}{16}$, und aus den Koordinaten der Punkte 4, 6 und den entgegengesetzten von 1, dass die Prismenfläche $A_{-1} B_1 C_\infty$ sich in $A_{\frac{32}{7}} B_{-1} C_{\frac{16}{5}}$, eine Fläche der Brachypyramide $\frac{16}{5}\breve{P}\frac{32}{7}$ in der Centraldistanz $\frac{17}{32}$, verwandelt. Die Basis wird zur Fläche der Brachypyramide $\frac{27}{16}\breve{P}\frac{3}{2}$ $A_{\frac{3}{2}} B_1 C_{\frac{27}{16}}$ im Abstand $\frac{17}{9}$.

Nachdem auf diese Weise die Lage der Flächen bestimmt ist, lassen sich nun auch die Koordinaten der Punkte berechnen, in denen die Prismenkanten des einen Krystalls die Flächen des anderen schneiden, es sind dies die Punkte $\left(1, 0, \frac{1}{18}\right)$, $\left(\frac{26}{33}, \frac{7}{33}, -\frac{29}{66}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{25}{66}\right)$ und $\left(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}\right)$.

§ 119. Monokline Zwillinge. Im monoklinen System können alle Flächen mit Ausnahme des Klinopinakoids als Zwillingsebenen auftreten, am häufigsten sind jedoch Zwillinge parallel zu dem Orthopinakoid oder einer Orthodomafläche.

Fig. 161 stellt einen Zwilling des Augits von der in Fig. 143 abgebildeten Kombination parallel $\infty \bar{P} \infty$ dar, wobei auch hier der Winkel β statt 89° 38′ als ein rechter Winkel angenommen, wodurch die Zeichnung ausserordentlich einfach wird, ohne wesentlich von der genauen Form verschieden zu werden.

Bei dem in Fig. 162 wiedergegebenen Zwilling des Gipses von der in Fig. 138 abgebildeten Kombination, aber mit vorherrschendem Prisma, ist die vordere Hälfte um die auf $\infty \mathrm{P} \infty$ senkrechte Axe um 180° verdreht. Die Prismenkanten behalten dabei ihre Richtung, die Ecken auf denselben werden erhalten, indem man Senkrechte in jeder Ecke auf den Kanten der hinteren Hälfte errichtet. Während derartige Zwillinge an den aufgewachsenen Gipskrystallen sehr häufig sind, zeigen die eingewachsenen Krystalle meist Zwillinge parallel $-\bar{P}\infty$. Fig. 163 zeigt einen solchen, von

der Kombination $\infty \bar{P} \infty$ $(\frac{1}{2})$, $-P(1)$, $\infty P(1)$, $oP(\frac{1}{2})$ mit Hilfe von Senkrechten zur Pyramidenkante konstruiert. Hat die Basis grössere Centraldistanz, so kann der einspringende Winkel unten ganz ver-

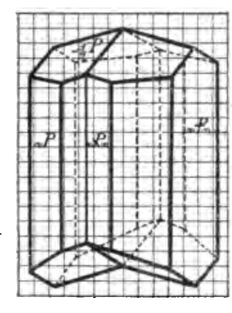


Fig. 161.

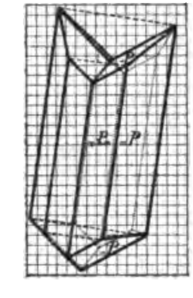


Fig. 162.

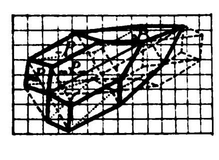


Fig. 163.

schwinden und die vier Prismenflächen bilden dann scheinbar eine rhombische Pyramide. Das andere Ende zeigt statt der Basis beiderseits gerundete Flächen (vergl. zu Fig. 139).

In Fig. 164 ist das am gemeinen Feldspat (Orthoklas) ausserordentlich häufige sog. Karlsbader Zwillingsgesetz erläutert. Der vordere Krystall zeigt die Kombination $\infty P(1)$, $\infty P \infty (\frac{1}{2})$, $oP(\frac{3}{2})$, $2\bar{P}\infty(1)$ (vergl. Fig. 142) in der gewöhnlichen Stellung und, mit punktierten Linien, denselben Krystall in der Zwillingsstellung, d. h. um eine zum Orthopinakoid $\infty \bar{P} \infty$ senkrechte Axe um 180° verdreht.

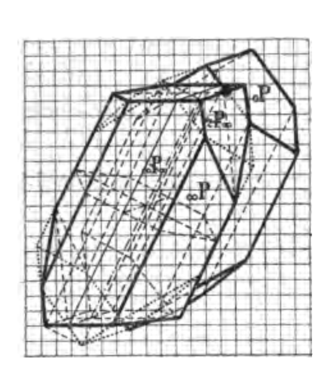


Fig. 164.

In dieselbe Stellung kommt der Krystall auch, wenn man ihn um die Vertikalaxe um 180° dreht, dann ist die dazu senkrechte Ebene (siehe Figur) keine krystallonomisch mögliche Fläche, aber senkrecht zu einer möglichen Kante. Der Krystall in der Zwillingsstellung ist nun nach links (im Bild hinten) verschoben, so dass sich die beiden Krystalle mit ihren linken Klinopinakoidflächen berühren; wäre der Krystall nach rechts verschoben, so würden sich die rechten Klinopinakoidflächen berühren (rechte und linke Zwillinge). Die Konstruktion bedarf keiner weiteren Erläuterung, während die Richtung der Vertikalaxe und der damit parallelen Kanten gefunden wird, indem man nach rechts halb so weit geht, als nach oben, wird

die Richtung der Senkrechten dazu gefunden, indem man umgekehrt nach rechts doppelt so weit geht, als nach unten, oder nach links doppelt so weit, als nach oben.

§ 120. Trikline Zwillinge. Im triklinen System kann jede Krystallfläche Zwillingsebene werden, da keine eine Symmetrieebene ist. Als ein Beispiel von Zwillingsverwachsungen in diesem System möge die in Fig. 165 dargestellte wiederholte Zwillingsbildung dienen, die bei den triklinen Feldspaten (Albit) sehr häufig ist, und durch die diese sich selbst in kleinen Bruchstücken und Spaltungsstücken nach der Basis als triklin erkennen lassen. Als Folge der häufig wiederholten Zwillingsverwachsung parallel zu $\infty \breve{P} \infty$ entstehen dünne Zwillingslamellen, die auf der Spaltungsfläche als scharfe Linien und Streifen parallel zu der Kante c zu b, der Basis zum Brachypinakoid hervortreten. Der Winkel $c:b$ ist 86° 24′. Bei einer einmaligen Drehung entsteht oben ein einspringender Winkel von 172° 48′.

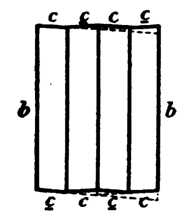


Fig. 165.

§ 121. Wiederholte Zwillingsbildung, Drillinge, Viellinge, polysynthetische Verwachsung. Durch Zwillingsbildungen werden oft Formen hervorgebracht, die scheinbar anderen Systemen angehören. Ein Zwilling des Albits sieht von der einen Seite betrachtet monoklin, ein Gipskrystall oder Augitkrystall (Fig. 162 und 161) rhombisch aus. Besonders bei Durchkreuzungszwillingen, bei denen die sonst gewöhnlich sichtbaren einspringenden Winkel wegfallen, kann der Charakter der Krystalle sehr zweifelhaft werden. So sind z. B. die Krystalle des Harmotoms und Phillipsits von den verschiedenen Forschern für monoklin, rhombisch und tetragonal gehalten worden und die Symmetrieverhältnisse mancher Viellinge sind sogar die des regulären Systems. Derartige scheinbare Uebergänge in andere Systeme (Mimesie) treten besonders dann auf, wenn die Winkel einer Form nahezu so gross werden, wie sie bei Formen des anderen Systems sein müssten. So werden z. B. schon einfache Kombinationen des rhombischen Systems hexagonal erscheinen, wenn der Winkel des Prismas oder der Basiskanten der Pyramiden nahezu 120° ist, und zu dem Prisma das Brachypinakoid, zu der Pyramide das entsprechende Brachydoma hinzutritt (Witherit, Kupferglanz). Auch durch wiederholte Zwillingsbildung parallel zu dem Prisma werden dann anscheinend hexagonale Formen hervorgebracht (Aragonit, Weissbleierz).

Als Beispiele für derartige wiederholte Zwillingsbildungen können die folgenden Formen dienen, die für den Harmotom und Phillipsit unter Annahme solcher Axenverhältnisse und Winkel gezeichnet sind, dass dabei schliesslich wirklich reguläre Formen herauskommen. Bei Fig. 166 ist der einfache Krystall von **monoklinem** Habitus dargestellt, der allen folgenden Formen zu Grund liegt, $\beta = 54^0\,44'$

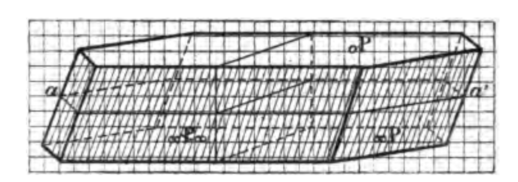


Fig. 166.

$(tg = \sqrt{2})$ statt $55^0\,10'$, $a:b = 0{,}7071:1\left(\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ statt 0,7031 : 1. Die Centraldistanzen der Flächen sind im Uebrigen so gewählt, dass die Entfernung $a\,a'$ in Fig. 166 gleich $c\,c'$ in Fig. 168, der Abstand der Flächen der Basis $o\,P$ in Fig. 166 gleich der Breite von q' Fig. 168 $= \frac{\sqrt{2}}{2}$, und der Abstand der Flächen des Klinopinakoids $\infty P \infty$ doppelt so gross $= \sqrt{2}$ ist. Die Flächen von ∞P und $\infty P \infty$ sind parallel zu der Kombinationskante gestreift.

Fig. 167 zeigt nun den Zwilling von **rhombischem** Habitus. Die mit ∞P und $\infty P \infty$ bezeichneten Teile sind in der ursprünglichen Stellung und wie Fig. 166 gestreift, die mit (∞P) und $(\infty P \infty)$ be-

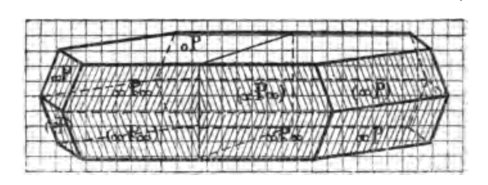


Fig. 167.

zeichneten Teile erscheinen dagegen parallel zu der Basis oder auch parallel zu der darauf senkrechten Ebene beziehungsweise um die auf diesen Flächen senkrechten Axen um 180° verdreht. Auf dem Klinopinakoid entsteht dabei eine federförmige Streifung, deren Richtung auf beiden Seiten entgegengesetzt ist.

Fig. 168 zeigt die häufigste Form des Harmotoms, bei der zwei anscheinend rhombische Krystalle (Fig. 167) sich unter einem

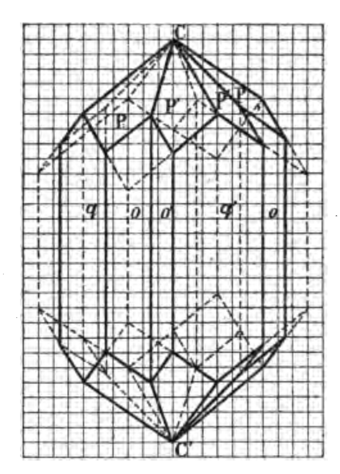


Fig. 168.

Winkel von nahezu 90° durchkreuzen (Kreuzstein). Die Flächen *P* und *P'* fallen dabei nicht (wie in der Zeichnung) genau in eine Ebene, sondern bilden einen Winkel von 179° 23'. Die Flächen *P P'*

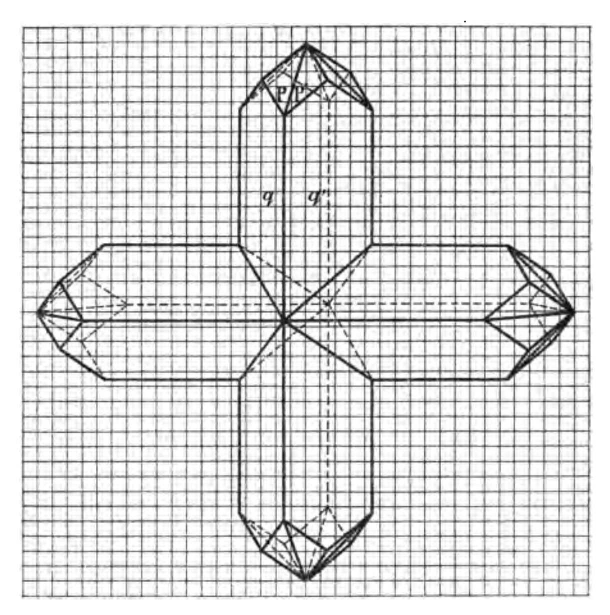


Fig. 169.

sind federartig gestreift. Die scheinbaren Zwillinge sind also eigentlich Doppelzwillinge; die letzte Verwachsung ist nach einem Klino-

doma, dessen Kantenwinkel nahezu 90° beträgt. Denkt man sich die Centraldistanzen der Pinakoide so gewählt, dass Breite und Dicke der einfachen Krystalle gleich ist, so würden bei diesem Doppelzwilling die Fugen (ἁρμός Fuge), von denen der Harmotom seinen Namen hat, ganz wegfallen, *o* und *o'* würden verschwinden, und es entstünde ein tetragonales Prisma *q q'* mit auf den Kanten aufgesetzter Pyramide entgegengesetzter Ordnung.

Fig. 169 zeigt zwei solche scheinbar tetragonale Krystalle wiederum zwillingsartig nach $P\infty$ (tetragonal) bezw. ∞P (monoklin)

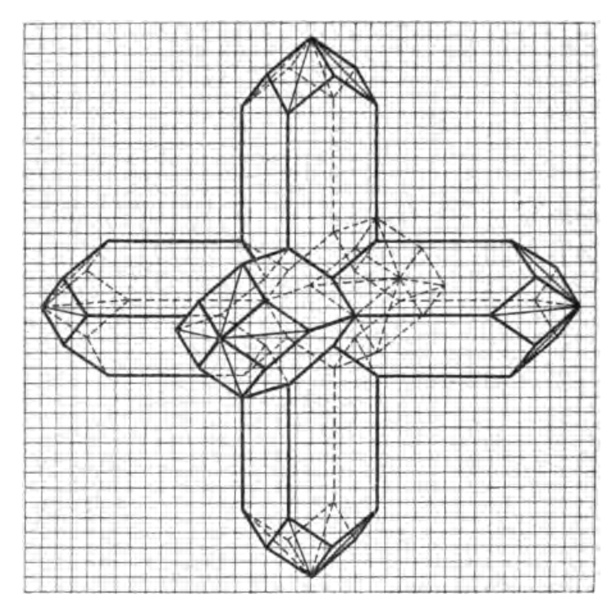


Fig. 170.

verwachsen, wie dies am Phillipsit öfter vorkommt. Werden die einfachen Krystalle als monoklin aufgefasst, so wären derartige Krystalle Achtlinge und Bildungen, wie die in Fig. 170 dargestellte Zwölflinge. Hierbei sind vollkommen reguläre Symmetrieverhältnisse; und in der That würde bei Verkürzung der Prismen ein Rhombendodekaeder erhalten werden (Annerod b. Giessen, Stempel b. Marburg).

Fig. 171 zeigt einen Zwölfling des Harmotoms von Andreasberg nach denselben Gesetzen wie Fig. 170 mit vollkommen regulären Symmetrieverhältnissen.

Was das Zeichnen der Figuren 168—171 anlangt, so ist dasselbe höchst einfach, wenn man dabei von dem Rhombendodekaeder ausgeht. Bei Fig. 168 entsteht bei Verlängerung der Kanten *P* mit *q* ein in der Richtung der Vertikal-

axe in die Länge gezogenes Rhombendodekaeder, daher die Koordinaten der Ecken: $(0, 0, \frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0, 1)$ und $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. In Figur 169 ist das Rhombendodekaeder mit halber Axenlänge nach oben und unten und ebenso nach

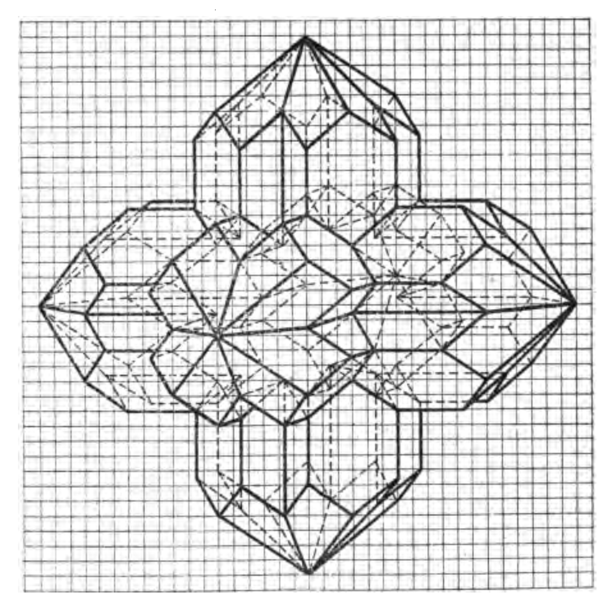


Fig.171.

links und rechts auseinandergezogen, bei Fig. 170 auch nach vorn und hinten. Die Koordinaten der Ecken, sind in diesem Fall: $(0, 0, 2)$, $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{7}{4})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ uud $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. In Fig. 171 endlich sind die Koordinaten: $(0, 0, 2)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

XVI. Kapitel.

Krystallnetze und Modelle.

§ 121. Länge der Kanten. Sind die rechtwinkligen Koordinaten zweier Ecken eines Körpers gegeben, so lässt sich deren Entfernung berechnen. Sind P_1 mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1 und P_2 mit den Koordinaten x_2, y_2, z_2 die beiden gegebenen Punkte, so ist $F_1 F_2 = p$ die Projektion der Kante $P_1 P_2$ auf die Ebene XY aus dem rechtwinkligen Dreieck $EF_1 F_2$ (Fig. 172) zu bestimmen, und zwar ist

$$p_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Zieht man $P_2 G$ parallel $F_1 F_2$, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck $G P_1 P_2$

$$P_1 P_2{}^2 = k^2 = p^2 + (z_1 - z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

$$\text{also } k = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

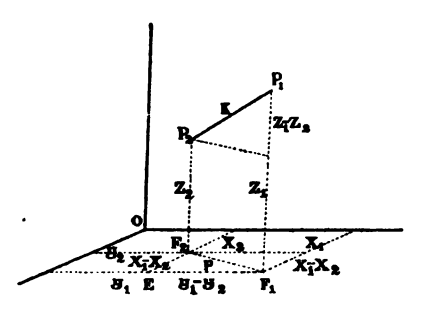


Fig. 172.

Durch Konstruktion wird k gefunden, indem man die Differenzen der Koordinaten $(x_1 - x_2)$ und $(y_1 - y_2)$ als Katheden eines rechtwinkligen Dreiecks aufträgt und aus der Hypotenuse dieses Dreiecks und der Differenz $(z_1 - z_2)$ als Katheden ein neues rechtwinkliges Dreieck konstruiert, dessen Hypotenuse dann $= k$ ist.

§ 123. **Konstruktion der Flächen.** Sind die Ecken eines Körpers durch ihre rechtwinkligen Koordinaten gegeben, so lassen sich auch die Polygone konstruieren, welche von den Kanten des Körpers begrenzt werden. Da wo die Länge der Kanten zur Konstruktion nicht ausreicht, also im allgemeinen bei allen Vielecken, wird noch die Länge einer oder mehrerer Diagonalen bestimmt. Da an Krystallen die Koordinaten der Ecken aus den Elementen der Grundform und dem Axenverhältnis der Flächen bestimmt werden können und daraus die Gestalt der begrenzenden Flächen, also auch deren Winkel, so ist damit auch bewiesen, dass die ebenen Winkel an Krystallen bei gegebener Grundform durch das Axenverhältnis der Fläche, also durch m und n bestimmt sind.

§ 124. **Krystallnetze.** Hat man die Gestalt der einzelnen Flächen eines Krystalls bestimmt, so kann man durch richtiges Aneinanderlegen derselben ein sogenanntes **Krystallnetz** erhalten, welches die ganze Oberfläche des Krystalls in eine Ebene gelegt darstellt. In diesem Netz hängen je zwei Flächen mit der Kante, welche sie zusammen bilden, an einander oder stossen doch bei dem Zusammenbiegen in derselben zusammen. Da die Summe der ebenen

Winkel an einer Ecke nie 4 Rechte erreicht, so bleibt, wenn man die Flächen an einer Ecke um einen Punkt herum anträgt, stets noch ein mehr oder weniger grosser Winkel frei. Ist ein Krystallnetz richtig konstruiert und etwa auf Karton übertragen, und werden dann die äussersten Linien ganz durchschnitten, die inneren, in denen die Flächen zusammenhängen, dagegen nur geritzt, so erhält man bei dem Zusammenbiegen eine vollständig begrenzte Form, ein Modell des Krystalls.

§ 125. Die Kanten der Achtundvierzigflächner. Die Konstruktion der Kanten geschieht am einfachsten mit Benutzung des quadrierten Papieres, welches das direkte Abtragen der Koordinaten mit hinreichender Genauigkeit gestattet. Um das Netz eines Achtundvierzigflächners etwa $3\,O\,\frac{3}{2}$ (Fig. 36) zeichnen zu können, braucht man drei Kanten. Die oktaedrische Kante, welche die oktaedrische Ecke $C\,(0, 0, 1)$ mit der rhombischen $R\,(0, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ verbindet, ist auch in der perspektivischen Zeichnung in der richtigen Grösse wieder gegeben, sie wird (Fig. 173) gefunden als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks CHR, in dem $CH = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ ($3^3/_5$ Quadratseiten) und $HR = \frac{3}{5}$ ($5^2/_5$ Quadratseiten). (Das Vorzeichen der Differenzen kann stets positiv genommen werden). Die hexaedrische Kante DF, welche die rhombische Ecke $(0, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$ mit der trigonalen Ecke ($x = y = z = \frac{1}{2}$) verbindet, wird gefunden aus dem Dreieck DFT, in welchem $TF = TR$ die Hypotenuse des gleichschenkligrechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Kathede $= \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ ist und $DT = \frac{1}{2}$. Die dodekaedrische Kante DG endlich, welche die oktaedrische Ecke $(0, 0, 1)$ mit der trigonalen Ecke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ verbindet, ist die Hypotenuse des Dreiecks ODG, dessen eine Kathede $OG = OT$ Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ODT, dessen Katheden $= \frac{1}{2}$ sind, ist und dessen andere Kathede OD ebenfalls $= \frac{1}{2}$ ist.

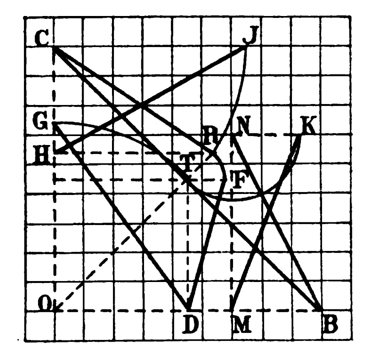


Fig. 173.

Aus den 3 Kanten CR, DF und DG lässt sich das Netz von $3\,O\,\frac{3}{2}$ mit Hilfe von 3 Zirkel auf folgende Weise konstruieren: Man schlage um einen Punkt (o in Fig. 174) zwei koncentrische Kreise

mit der längeren und mittleren Kante. Mit der kürzeren Kante schlägt man von einem beliebigen Punkt a des einen Kreises anfangend einen Bogen nach dem anderen Kreis, von dem Schnittpunkt aus weiter nach dem ersten Kreis und so fort bis man bei dem achtenmal wieder bei einem Punkt (a_1) des ersten Kreises anlangt. Verbindet man die benachbarten Punkte auf den Kreisen unter sich

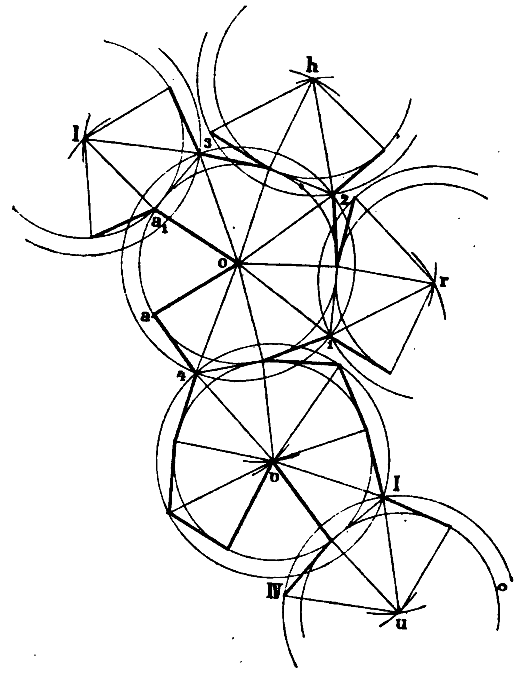


Fig. 174.

und mit dem Mittelpunkt, so erhält man die 8 an einer oktaedrischen Ecke zusammenstossenden Dreiecke. Der Winkel $a\,o\,a_1$ giebt an um wieviel die Summe der Winkel an dieser Ecke von 360° verschieden ist. Die Punkte auf dem kleineren Kreis sind die rhombischen Ecken, die auf dem grösseren Kreis trigonale Ecken. Schlägt man von einer rhombischen Ecke mit der mittleren Kante und von der benachbarten trigonalen Ecke mit der längeren Kante Bogen, so ist der Schnittpunkt wieder eine oktaedrische Ecke. Verfährt man auf diese Weise an vier abwechselnden kürzeren Kanten, so erhält man die 4 Punkte l, h, r, v, um welche man ebenso wie um o koncentrische Kreise zieht und je 8 Dreiecke konstruiert. An das vierte oder fünfte Dreieck in einem der Kreise trägt man wieder ein Dreieck

an und findet so die letzte oktaedrische Ecke (*u*). Die Kanten, in welchen je zwei Flächen zusammenstossen und welche nur geritzt werden sollen, sind mit dünneren Linien, diejenigen, welche ganz durchschnitten werden sollen, mit stärkeren Linien zu zeichnen.

§ 126. **Die vollflächigen Vierundzwanzigflächner.** Die Netze der Ikositetraeder werden genau wie die der Hexakisoktaeder konstruiert, nur werden die längeren Radien nicht als Kanten gezeichnet, so dass an jeder oktaedrischen Ecke an Stelle von

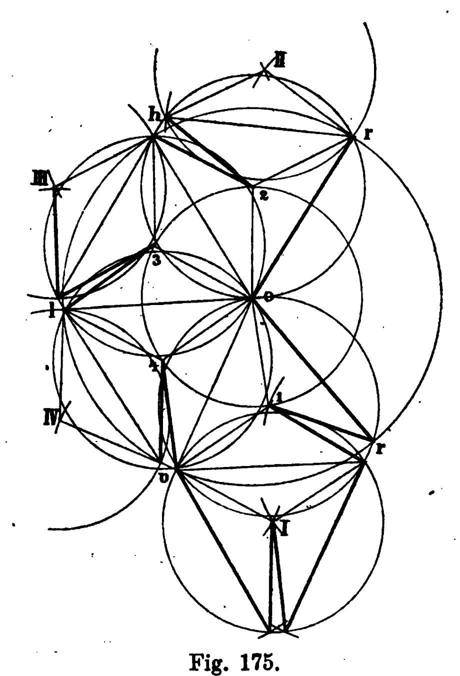


Fig. 175.

8 Dreiecken 4 Deltoide erhalten werden. Bei $2\,O\,2$ bleibt der längere Radius derselbe (DG Fig. 173) wie in Fig. 174, da die trigonale Ecke dieselben Koordinaten hat, die mittlere Kante wird $= BN$ (Fig. 173) Hypotenuse des Dreiecks BMN, in welchem $BM = 1 - \frac{2}{3}$ und $MN = \frac{2}{3}$ ist. Die kürzere Kante ist $MK =$ Hypotenuse des Dreiecks MNK, in welchem $NK = NT$ Hypotenuse des gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks mit der Kathede $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ist.

Bei den Pyramidenwürfeln zieht man um einen Punkt, der zur oktaedrischen Ecke werden soll, nur einen Kreis mit der oktaedrischen Kante. Auf der Peripherie trägt man viermal die hexaedrische Kante, die bei $\infty O\,2$ z. B. gleich $2\,MN$ (12 Quadratseiten)

ist, ab und erhält so je 4 gleichschenklige Dreiecke. Die dodekaedrische Kante ist bei $\infty O 2 = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = 1$ (OC in Fig. 173).

Bei den Triakisoktaedern mO ist die oktaedrische Kante (die doppelte mittlere Kante) gleich $BC = \sqrt{2}$, die dodekaedrische Kante ist für $2 O$ gleich HJ (Fig. 173) der Hypotenuse des Dreiecks CHJ in dem $CJ = CR = \sqrt{(1 - \frac{2}{5})^2 + (0 - \frac{2}{5})^2}$ und $CH = \frac{2}{5}$ Katheden sind, da die trigonale Ecke die Koordinaten $x = y = z = \frac{2}{5}$ hat.

Bei der Konstruktion des Netzes (Fig. 175) zeichnet man mit Hilfe zweier koncentrischer Kreise (Radien BC und MN) 8 gleichschenklige Dreiecke an einer oktaedrischen Ecke (o). Die vier Punkte auf dem kleineren Kreis sind vier trigonale Ecken (1—4). An je einem Schenkel von vier nicht aneinanderstossenden Dreiecken trägt man ein weiteres an und hat dann z. B. die 12 oberen Dreiecke. Trägt man an die Basis der zuletzt gezeichneten Dreiecke je ein weiteres an, so sind die Spitzen dieser die vier anderen trigonalen Ecken (I—IV), an denen man noch je zwei Dreiecke wie bei I antragen muss.*)

§ 127. **Rhombendodekaeder, Oktaeder, Würfel.** Bei der Konstruktion des Netzes des Rhombendodekaeders verfährt man ganz ähnlich wie bei Fig. 175, nur nimmt man die dodekaedrische Kante DG (Fig. 173) als Radius der kleinen Kreise, fängt mit dem Abtragen statt bei r bei 1 an und lässt die Radien des grossen Kreises (BC) (die längeren Diagonalen) weg. Bei I—IV trägt man je einen Rhombus an.

Das Netz des Oktaeders ist von 8 gleichseitigen Dreiecken von der Seitenlänge BC gebildet. Man trägt vier dieser Dreiecke um einen Punkt herum auf, trägt an eine freie Seite ein fünftes an und um die Spitze desselben herum noch drei andere.

Das Netz des Würfels wird von 6 Quadraten gebildet, deren Seite $= 2\,OC = 2$ ist. Vier solche Quadrate trägt man an den Seiten eines Quadrats an, an der äusseren Seite eines derselben fügt man das sechste hinzu.

§ 128. **Pentagonal-hemiedrische Formen.** Die längeren und kürzeren pentagonalen Kanten (vergl. § 64) der Dyadisdodekaeder BP und CP (Fig. 176) sind auch in der Zeichnung (Fig.

*) Der Leser wird den Fehler in der Zeichnung bei v und IV bemerken und verbessern.



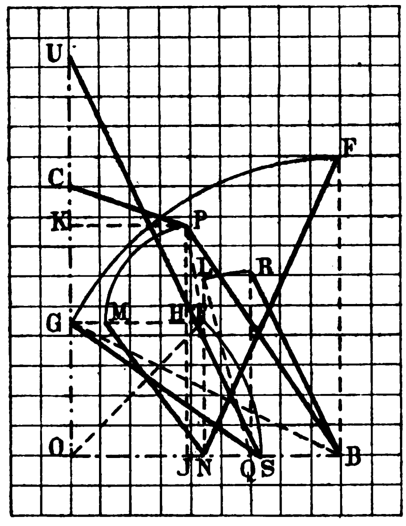


Fig. 176.

63) in der richtigen Grösse enthalten, die mittleren pentagonalen Kanten MN werden für $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ als Hypotenuse des Dreiecks MNT,

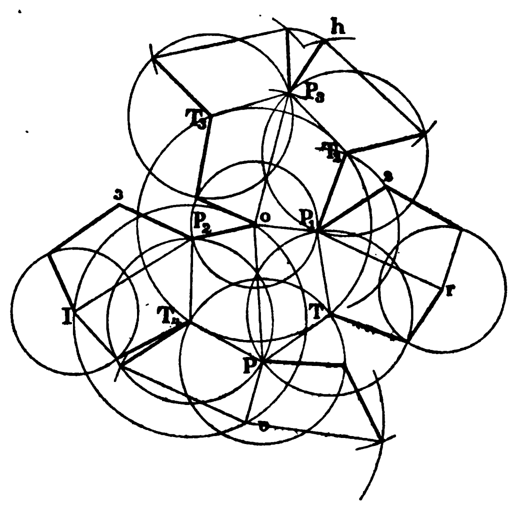


Fig. 177.

dessen eine Kathede $NT = \frac{1}{2}$ und dessen andere $MT = PT$ Hypotenuse des Dreiecks HTP ist, dessen eine Kathede $HT = GT - GH = \frac{1}{2} - \frac{3}{7}$ und dessen andere $PH = PJ - HJ = \frac{6}{7} - \frac{1}{2}$ ist. Die Diagonale der Trapezoide, welche zur Konstruktion eben-

falls nötig wird, ist GS die dodekaedrische Kante von $3\,O\,\frac{3}{2}$ (vergl. auch DG Fig. 173).

Bei der Konstruktion des Netzes (Fig. 177) geht man z. B. von einer längeren Kante $OP = BP$ (Fig. 176) aus, alsdann ist T_1 der Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius $OT_1 = GS$ um o, und des Kreises mit dem Radius $PT_1 = MN$ um P. P_2 ist der Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius $P_2\,T_1 = MN$ um T_1 und des Kreises mit dem Radius $OP_2 = CP$ (Fig. 176) um O. Damit ist zugleich das der längeren Kante anliegende Trapezoid gefunden. Um das der kürzeren Kante OP_1 anliegende Trapezoid zu finden,

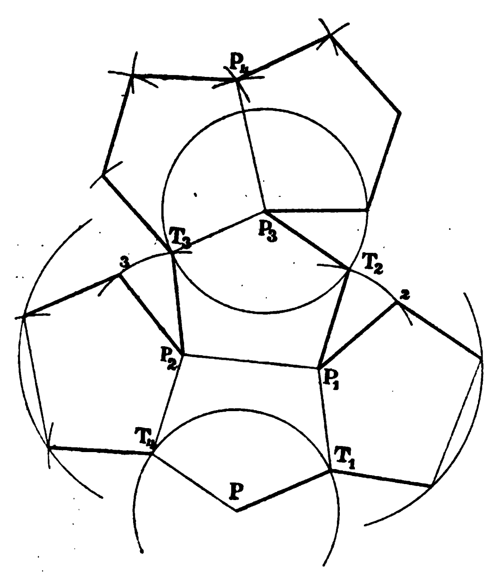


Fig. 178.

sucht man zunächst T_2 als Schnittpunkt des Kreises mit $OT = MN$ um O, der schon gezogen war, mit dem Kreis mit dem Radius $P_1\,T = MN$ um P_1, und findet dann P_3 als Schnittpunkt der um O und T_2 gezogenen Kreise mit der längeren und mittleren Kante. In ähnlicher Weise findet man die den mittleren Kanten anliegenden Trapeze. Das Netz (Fig. 177) enthält die eine, obere Hälfte der 24 Flächen des Dyakisdodekaeders $\frac{3\,O\,\frac{3}{2}}{2}$.

Die Pentagondodekaeder haben zwei Arten von Kanten. Je zwei kürzere pentagonale Kanten fallen in eine Gerade, bei $\frac{\infty O 2}{2}$ gleich 1 (OB Fig. 176), die längeren Polkanten fallen weg, die

mittleren werden ähnlich wie bei den Dyakisdodekaedern gefunden, für $\frac{\infty O 2}{2}$ sind sie $= BR$ (Fig. 176), der Hypotenuse des Dreiecks BQR, dessen eine Kathede $BQ = OB - OQ = 1 - \frac{2}{3}$ und dessen andere Kathede $QR = QL$ Hypotenuse des Dreiecks QLN, dessen eine Kathede $NQ = OQ - ON = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$, und dessen andere Kathede $LN = \frac{2}{3}$ ist. Zur Konstruktion der Fünfecke ist noch eine Diagonale nötig. Bei $\frac{\infty O 2}{2}$ ist die Verbindungslinie zweier pentagonalen Ecken $(1, 0, \frac{1}{2})$ und $(0, \frac{1}{2}, 1)$ gleich FN der Hypotenuse des Dreiecks BFN, dessen eine Kathede $BN = \frac{1}{2}$ und dessen andere Kathede $BF = BG$ Hypotenuse des Dreiecks OBG ist, dessen eine Kathede gleich $OB = 1$ und dessen andere $OG = \frac{1}{2}$ ist.

In dem Netz des Pentagondodekaeders $\frac{\infty O 2}{2}$ Fig. 178 ist P_3 die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis $P_1 P_2 = 1$ und dessen Schenkel $P_1 P_3$ und $P_2 P_3 = FN$, T_2 und T_3 sind die Spitzen gleichschenkliger Dreiecke, deren Schenkel die mittlere pentagonale Kante BR (Fig. 176) ist. Das Netz enthält nur 6 von den 12 Flächen des Dodekaeders.

§ 129. Die tetraedrisch-hemiedrischen Formen. Die kürzeren Kanten der Hexakistetraeder sind die dodekaedrischen der vollflächigen Form (GS Fig. 176 und DG Fig. 173). Die mittleren, tetraedrischen Kanten verbinden die oktaedrischen Ecken mit den tetraedrischen, also z. B. bei $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ die Ecken $(1, 0, 0)$ und $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$ und zwar findet man die Kante BF (Fig. 179) als Hypotenuse des Dreiecks BDF, dessen eine Kathede gleich $DB = OB - OD = 1 - \frac{3}{4}$ und dessen andere Kathede $DF = DE$ die Hypotenuse des Dreiecks ODE ist, dessen Katheden gleich $\frac{3}{4}$ sind. Die längeren Kanten der Hexakistetraeder sind verlängerte hexaedrische Kanten der vollflächigen Form und verbinden die trigonale Ecke eines Oktanten z. B. die Ecke $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ mit der tetraedrischen Ecke im anstossenden Oktanten $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Diese Kante OG wird gefunden

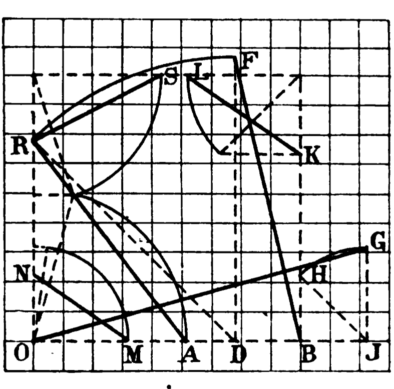


Fig. 179.

als Hypotenuse des Dreiecks OGJ, dessen eine Kathede $OJ = \frac{5}{4}$ und dessen andere Kathede $GJ = HJ$ Hypotenuse des Dreiecks BHJ ist, dessen Katheden gleich $\frac{1}{4}$ sind.

Das Netz des **Hexakistetraeders** $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ (Fig. 180) erhält man, indem man zunächst die 6 in einer trigonalen Ecke zusammenstossenden Dreiecke konstruiert ($HT_1 = OG$, $rT_1 = GS$ (Fig. 176) und $Hr = BF$), dann die drei anderen trigonalen Ecken sucht (z. B.

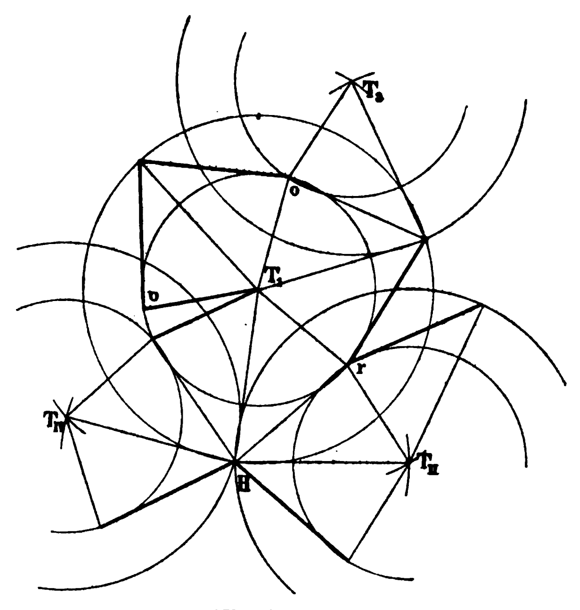


Fig. 180.

T_{II} durch Bogen um H mit OG und um r mit GS) und um diese je 6 Dreiecke wie um T_1 anträgt. Das Netz enthält die Hälfte der Flächen. Die trigonale Ecke ist am flachsten, die oktaedrische Ecke etwas spitzer und die tetraedrische Ecke noch spitzer, wie man dies an der Grösse der von 360° übrig bleibenden Winkel bei T_1, r und H sehen kann.

Die **Trigondodekaeder** haben zweierlei Kanten. Die längeren Grundlinien der gleichschenkligen Dreiecke sind gleich den Diagonalen der Würfelflächen, also $= 2\,BC = 2\sqrt{2}$, die kürzeren Schenkel dieser Dreiecke sind bei den verschiedenen Trigondodekaedern verschieden, bei $\frac{2O2}{2}$ (Fig. 66) sind es die Linien, welche die trigonalen Ecken $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ mit den tetraedrischen $(1, 1, -1)$ verbinden. Eine

solche ist SU (Fig. 176), die Hypotenuse des Dreiecks OSU, dessen eine Kathede $OU = \frac{3}{2}$ ist und dessen andere Kathede $OS = OT$ Hypotenuse des gleichschenkligen Dreiecks ONT ist, dessen Katheden $= \frac{1}{2}$ sind.

Um das Netz eines Trigondodekaeders zu erhalten, verfährt man ähnlich wie bei Fig. 175 und trägt die zwölf gleichschenkligen Dreiecke, je 3 an vier trigonalen Ecken z. B. 1, 4, 3 und IV, an.

Von den Kanten der Deltoiddodekaeder sind zwölf dodekaedrische, wie am Vollflächner (für $\frac{2O}{2} = HJ$ (Fig. 173) die zwölf anderen sind tetraedrische und verbinden z. B. bei $\frac{2O}{2}$ die oktaedrischen Ecken (1, 0, 0) mit tetraedrischen $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. In diesem besonderen Fall wird diese Kante $= \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2} = 1$ (OB).

Das Netz der Deltoiddodekaeder ist ganz ähnlich wie Fig. 180, nur fallen die längeren Kanten (HT_1) weg. Zur Konstruktion hat man dieselben jedoch nötig, sie sind für

$$\frac{2O}{2} = \sqrt{\left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{16}{15}\right)^2} = \frac{4}{5}\sqrt{2},$$

also gleich der Hypotenuse des gleichschenkligen Dreiecks, dessen Katheden gleich $\frac{4}{5}$ sind. Statt dieser Diagonale kann man auch die andere Diagonale der Deltoide nehmen, die für alle Deltoiddodekaeder gleich der Kante des Oktaeders ist $= BC = \sqrt{2}$. Die Diagonalen der Deltoide von $\frac{2O}{2}$ verhalten sich hiernach zu einander wie 4 : 5.

Die Kanten des Tetraeders sind die Diagonalen der Würfelflächen also $= 2\sqrt{2} = 2\,BC$. Das Netz des Tetraeders ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen Seite $= 4\sqrt{2}$ ist. Die Mitten je zweier anstossenden Seiten sind zu verbinden, so dass vier gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge $2\sqrt{2}$ entstehen.

§ 130. Die Plagieder. Die Plagieder werden von Fünfecken begrenzt, welche dreierlei Seiten haben. Die in Fig. 181 wie in den Figuren 69 und 70 mit K_1 bezeichneten Kanten verbinden die oktaedrischen Ecken (Koordinaten : 1, 0, 0) mit den plagiedrischen $\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20}\right)$ und sind daher gleich RS (Figur 179) $=$

$$\sqrt{\left(1-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(0-\frac{9}{20}\right)^2 + \left(0-\frac{3}{20}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{20}\right)^2 + \left(\frac{3}{20}\right)^2}.$$

Die mit K_2 bezeichneten Kanten verbinden zwei plagiedrische Ecken

$\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20} \text{ und } \frac{9}{20}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{20}\right)$ und sind also gleich $KL = \sqrt{\left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \left(\frac{3}{10}\right)^2}$. Die dritte Art Kanten K_3 verbindet die trigonalen Ecken $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ mit plagiedrischen und ist daher gleich $MN = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2}$.

Zur Konstruktion der Fünfecke sind noch zwei Diagonalen zu bestimmen, von denen die eine (OT Fig. 181) die dodekaedrische

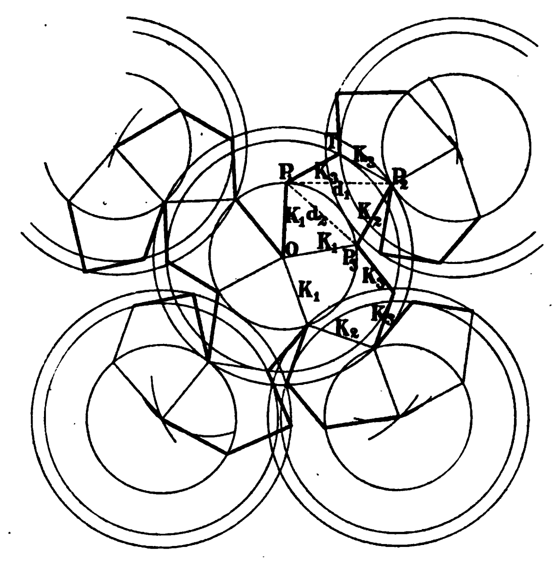


Fig. 181.

Kante der holoedrischen Form (DG in Fig. 173) ist, während die andere (OP_2 Fig. 181) eine oktaedrische Ecke (1, 0, 0) mit einer nicht benachbarten plagiedrischen Ecke $\left(\frac{9}{20}, \frac{3}{4}, \frac{3}{20}\right)$ verbindet und deshalb gleich AR (Fig. 179) $= \sqrt{\left(\frac{11}{20}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{20}\right)^2}$ ist.

Bei der Konstruktion des Netzes der Plagieder (Fig. 181) kann man um einen Punkt, der zur oktaedrischen Ecke werden soll, drei koncentrische Kreise ziehen; auf dem kleinsten mit dem Radius K_1 liegen zwei plagiedrische Ecken, auf dem mittleren mit dem Radius $OT = DG$ liegt die trigonale Ecke und auf dem dritten mit dem Radius $OP_2 = AR$ liegt die dritte plagiedrische Ecke. Die Entfernung der Punkte auf dem kleineren Kreis von den Punkten

auf dem mittleren Kreis ist gleich K_3, die der Punkte auf dem ersteren von den Punkten auf dem grössten Kreis gleich K_2. Während bei allen übrigen hemiedrischen Formen das Netz einer Form zugleich das der Gegenform ist, sind die Netze des rechten und linken Plagieders insofern verschieden, als bei dem ersteren die Kanten K_1, K_2, K_3 sich in dieser Reihe folgen, wenn man rechts herum geht (im Sinne der Uhrzeiger), bei dem letzteren Fig. 69 und Fig. 181, wenn man links herumgeht Fig. 181 enthält die Hälfte der Flächen des linken Plagieders.

§ 131. Hexagonale Pyramiden. Die Basiskanten der hexagonalen Pyramiden sind in dem Querschnitt (Fig. 28) in richtiger Grösse enthalten, die primären Polkanten auch in der perspektivischen Ansicht, als die Kanten, welche die Enden der von links nach rechts gehenden Axe mit den Polecken verbunden. Die sekundären Polkanten findet man, wenn man die auf der, im Querschnitt vertikal gezeichneten Zwischenaxe gelegenen sekundären Basisecken mit dem Punkt verbindet, welchen man erhält, wenn man der von links nach rechts gehenden Nebenaxe die Länge der Vertikalaxe (*mc*) giebt. Zur Konstruktion der Polkanten der Pyramiden dritter Ordnung trägt man die im Querschnitt enthaltene Entfernung der Zwischenecken vom Schnittpunkt der Axen als eine Kathede auf und die Hauptaxe als andere, und konstruiert die Hypotenuse.

Das Netz der Pyramiden zeichnet man derart, dass man um eine Ecke als Polecke einen Kreis oder zwei Kreise (bei den zwölfseitigen Pyramiden) mit den Polkanten als Radien zieht und darauf die Basiskanten abträgt. An einer Basiskante konstruiert man ein kongruentes Dreieck an und findet so die zweite Polecke, bei der man wie bei der ersten verfährt.

§ 132. Skalenoeder und Rhomboeder. Da die skalenoedrischen Ecken abwechselnd über und unter den sekundären Basisecken der Pyramiden zweiter Ordnung liegen (vergl. § 58), so findet man bei den Skalenoedern und Rhomboedern die Mittelkanten als Hypotenusen von Dreiecken, deren eine Kathede die Basiskante der Pyramiden zweiter Ordnung (12 Quadratseiten) und deren andere Kathede der doppelte Abstand der Ecken von dem basischen Hauptschnitt ist, also $2z = \frac{2mc(2-n)}{3n}$. Bei den Rhomboedern ist dies stets $\frac{2}{3}$ der Hauptaxe. Die Polkanten findet man als Hypotenusen von Dreiecken, deren eine Kathede die sekundäre Zwischenaxe der Pyra-

miden zweiter Ordnung, also ebenfalls die Basiskante dieser Form ist, und dessen andere Kathede $= mc$ (Hauptaxe) $\pm \frac{2\,mc\,(2-n)}{3\,n}$ ist.

Wird der Abstand z zur Vertikalaxe addiert, so erhält man die längere, wird er subtrahiert die kürzere Polkante. Die Konstruktion des Netzes kann ebenso wie bei den Pyramiden gemacht werden. Da bei den Rhomboedern die kürzeren Polkanten gleich den Mittelkanten sind, braucht man ausser diesen nur die Diagonalen der Rhomben, welche den längeren Polkanten entsprechen.

§ 133. Hexagonale Trapezoeder. Die Trapezoeder (§ 61) haben dreierlei Kanten, längere und kürzere Mittelkanten und Polkanten. Durch Aufsuchen der Ecken (drei genügen) mit den Koordinaten $x = \frac{2}{n+1}$, $y = \frac{2\,(n-1)}{n+1}$ auf dem Querschnitt (Fig. 28), und Verbinden von je zwei in dasselbe Raumsechstel fallenden Ecken, erhält man die Projektion der Mittelkanten auf die Horizontalebene. Die Mittelkanten sind dann die Hypotenusen der Dreiecke, in denen ihre Projektion als die eine Kathede und der doppelte Abstand $2\,z = \frac{2\,mc\,(2-n)\,.\,(n-1)}{n\,(n+1)}$ als andere Kathede genommen ist. Die Polkanten werden gefunden als Hypotenusen von Dreiecken, deren eine Kathede der Abstand der im Querschnitt gefundenen Punkte von dem Schnittpunkt der Axen ist und deren andere Kathede $mc - z$ ist. Nimmt man als andere Kathede $mc + z$, so ist die Hypotenuse die Diagonale der Trapeze, welche man zur Konstruktion des Netzes, welches ganz ähnlich ist wie bei den Pyramiden, ebenfalls nötig hat. Die Netze der beiden Trapezoeder, welche von derselben Grundform abgeleitet sind, unterscheiden sich durch die Art, wie sich die Kanten folgen, die Trapeze sind nicht kongruent, sondern symmetrisch wie die Fünfecke der beiden Plagieder.

§ 134. Tetragonale Formen. Die Basiskanten der Pyramiden werden auch in diesem System direkt aus dem Querschnitt (Fig. 24) entnommen, die Polkanten aus den Dreiecken, deren Katheden die Hauptaxe und eine Nebenaxe, beziehungsweise Zwischenaxe ist, deren Länge ebenfalls aus dem Querschnitt zu entnehmen ist. Bei den Pyramiden dritter Ordnung ist die eine Kathede der Abstand der Zwischenecke vom Schnittpunkt der Axen. Bei den tetragonalen Skalenoedern und Sphenoiden ist die Mittelkante, welche durch den Endpunkt der nach vorn gehenden Nebenaxe geht, in der Zeichnung (Fig. 48 und 49) in der richtigen Grösse enthalten. Die Polkanten

werden aus Dreiecken gefunden, deren eine Kathede $= \sqrt{2}$ die Zwischenaxe der Pyramiden zweiter Ordnung ist, und deren andere Kathede $mc - \frac{mc}{n} = mc\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ oder $mc\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ ist. Bei den Sphenoiden ist die Polkante stets $= 2\sqrt{2}$, gleich der Diagonale des Quadrats mit der Seite $= 2$. Von den Mittelkanten der Trapeze ist die eine (vorn) in den Zeichnungen (Fig. 51 und 52) in richtiger Grösse enthalten, sie ist die Hypotenuse des Dreiecks, dessen eine Kathede $= 2y = 2 \cdot \frac{n-1}{n+1}$ und dessen andere Kathede $2z = 2 \cdot \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{mc}{n}$ ist. Die andere Mittelkante wird gefunden, wenn man als eine Kathede die Hypotenuse des gleichschenkligen Dreiecks nimmt, dessen Kathede $1 - \frac{n-1}{n+1}$ ist. Bei der Bestimmung der Polkanten und der Diagonale der Trapeze nimmt man als eine Kathede die Hypotenuse des Dreiecks mit den Katheden 1 und $\frac{n-1}{n+1}$, als andere Kathede $mc - \frac{mc}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}$ oder $mc + \frac{mc}{n} \cdot \frac{n-1}{n+1}$.

§ 135. **Rhombische Formen.** Die einzigen geschlossenen Formen im rhombischen System sind die Pyramiden und Sphenoide. Die Kanten der Pyramiden ergeben sich aus den drei Hauptschnitten, von denen der makrodiagonale in den Zeichnungen richtig enthalten ist. Die Kanten des Sphenoids, welches von der Grundform abgeleitet ist, entsprechen den Diagonalen der Rechtecke, von denen der Pinakoidalkörper begrenzt ist.

Die Kanten der Grundformen des monoklinen und triklinen Systems ergeben sich gleichfalls aus den Hauptschnitten, ihre Länge ist auch von den Winkeln der Axen abhängig. Die Flächen der Pinakoidalkörper haben die Winkel der Axen als Winkel und die doppelten Axen als Seiten.

§ 136. **Die Kombinationskanten.** Die Kombinationskanten lassen sich aus den Koordinaten der Ecken, welche sie verbinden, ableiten (§ 121). Im hexagonalen System empfiehlt sich die Projektion auf den basischen Hauptschnitt (vergl. Fig. 120). Die Projektionen der Kanten nimmt man dann als eine Kathede, die Differenz der Koordinaten in der Richtung der Vertikalaxe $z_1 c - z_2 c$ als andere Kathede, und findet dann die Länge der wirklichen Kante als Hypotenuse dieses Dreiecks. Alle horizontalen Kanten haben gleiche Grösse, wie ihre Projektionen. Im monoklinen System

projiciert man auf den klinodiagonalen Hauptschnitt, und benutzt die Differenzen $y_1 - y_2$ als zweite Katheden.

§ 137. **Netze der Kombinationen.** Die Netze der Kombinationen werden wie die der einfachen Formen konstruiert, wobei man zunächst die Flächen der vorherrschenden Form berücksichtigt;

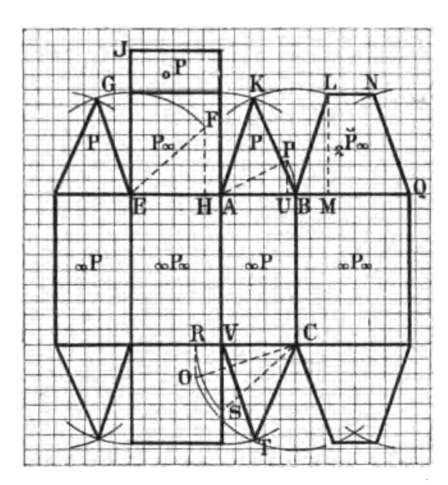


Fig. 182.

und dann die kleineren Flächen an gehöriger Stelle anbringt. Dabei empfiehlt es sich Flächen, welche derselben Zone angehören, möglichst zusammenhängen zu lassen. Auch bei der Konstruktion der Netze lässt sich das quadrierte Papier mit Vorteil verwenden, wie die Fig. 182 zeigt, welche die Hälfte des Netzes zu der in Fig. 135 abgebildeten rhombischen Kombination darstellt.

Die Strecken AE und BC sind direkt aus der Fig. 135 zu entnehmen. $AB = AP$ ist Hypotenuse des Dreiecks APU, dessen eine Kathede $PU = \frac{4}{3}a - \frac{5}{6}a = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}$, und dessen andere Kathede $AU = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ ist. $BQ = 2 \cdot \frac{5}{6}a = \frac{5}{6}$. $EG = EF$ ist Hypotenuse des Dreiecks EFH, dessen eine Kathede $EH = c = \frac{5}{9}$, und dessen andere Kathede $FH = \frac{4}{3}a - \frac{1}{3}a = 1a = \frac{1}{2}$ ist, $AK = EG$. $BK = CT = CO$ Hypotenuse des Dreiecks COR, dessen eine Kathede $OR = PU = \frac{1}{4}$ und dessen andere Kathede $CR = CS$ Hypotenuse des Dreiecks CVS ist, dessen eine Kathede $CV = c$ und dessen andere Kathede $SV = AU = \frac{1}{2}$ ist. $BM = PU = \frac{1}{4}$, $BL = BK$, $\sphericalangle BML$ ein rechter Winkel, $LN = 2 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{3} = GJ$.

Anhang.

Die geometrischen Eigenschaften der regulären Krystallformen.

§ 138. Die Inhalte der holoedrischen regulären Körper. Der Körper mOn, der alle regulären Formen umfasst, wird durch die 9 Symmetrieebenen bei gleicher Centraldistanz aller Flächen in 48 gleiche dreiseitige Pyramiden zerlegt. Die Grundfläche einer solchen Pyramide ($AORT$) ist das von einer Halbaxe $= a$, einer Zwischenaxe und einer oktaedrischen Kante begrenzte Dreieck (AOR). Nimmt man die Halbaxe a als Grundlinie, so ist die zugehörige Höhe die Koordinate der rhombischen Zwischenecke R also gleich $\frac{a}{1+\frac{1}{n}}$ und der Inhalt des Dreiecks $G = \frac{a^2}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Die Höhe h der Pyramiden ist die Koordinate der trigonalen Ecke T, also gleich $\frac{a}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ (s. p. 32) und folglich der Inhalt der Pyramiden $J = \frac{48\,G\,.\,h}{3} = \frac{8\,a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$. Der Inhalt von $3\,O\,\frac{3}{2}$ ist hiernach $= \frac{12}{5}\,a^3$ von $4\,O\,2 = \frac{64}{21}\,a^3$. Für mOm findet man $\frac{8\,a^3}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)}$, daher der Inhalt von $2\,O\,2 = \frac{8}{3}\,a^3$, von $3\,O\,3 = \frac{18}{5}\,a^3$. Für mO findet man $\frac{4\,a^3}{2+\frac{1}{m}}$ und daraus den Inhalt von $\frac{3}{2}\,O$ gleich $\frac{3}{2}\,a^3$, von $2\,O = \frac{8}{5}\,a^3$ und von $3\,O$ gleich $\frac{12}{7}\,a^3$. Für $\infty\,O\,n$ findet man $\frac{8\,a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$, für $\infty\,O\,2 = \frac{32}{9}\,a^3$ und für $\infty\,O\,3 = \frac{9}{2}\,a^3$. Für $\infty\,O$ findet man $2\,a^3$, für $O = \frac{4}{3}\,a^3$, für $\infty\,O\,\infty = 8\,a^3$, wobei a stets die halbe Axe ist.

Allgemein findet man nach der Formel den Inhalt jedes holoedrischen regulären Körpers, wenn man den Inhalt des umschriebenen

Würfels mit dem Produkt aus einer Koordinate einer trigonalen Ecke mit der halben Summe der Koordinaten einer rhombischen Ecke multipliziert.

§ 139. **Die Inhalte der pentagonal-hemiedrischen Körper.** Legt man durch je zwei pentagonale Ecken und den Schnittpunkt der Axen O Ebenen, so erhält man in jedem Oktant drei dreiseitige Pyramiden wie AP_1P_2O und ausserdem einen Körper, der aus zwei Pyramiden zusammengesetzt ist, deren gemeinsame Basis das gleichseitige Dreieck $P_1P_2P_3$ ist, und deren Höhen zusammen gleich OT der trigonalen Axe sind.

Die Pyramide AP_1P_2O hat als Grundfläche das Dreieck AP_1O, dessen Grundlinie $AO = 1$ und dessen Höhe gleich der längeren Koordinate des Punktes $P_1 = \frac{n(m-1)}{mn-1}a = \frac{1-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{mn}}a$ ist, dessen Inhalt also $G = \frac{1-\frac{1}{m}}{2\left(1-\frac{1}{mn}\right)}a^2$ ist. Die Höhe der Pyramide AP_1P_2O ist gleich der kleineren Koordinate der pentagonalen Ecke P_2 $h = \frac{m(n-1)}{mn-1}a = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{mn}}a$. Daher ist der Inhalt der 24 Pyramiden

$$= \frac{24 \,.\, Gh}{3} = \frac{4\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2} \cdot a^3.$$

P_1P_2 ist als Verbindungslinie der Punkte mit den Koordinaten $x_1 = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{mn}}a$, $y_1 = \frac{1-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{mn}}a$, $z_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{nm}}a$, $y_2 = 0$, $z_2 = \frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{mn}}a$ zu bestimmen, und zwar ist darnach

$$P_1P_2 = a\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{mn}}\right)^2 + \left(\frac{1-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{mn}}\right)^2 + \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{mn}}\right)^2}$$

Daher ist der Inhalt des gleichseitigen Dreiecks $P_1P_2P_3$

$$G_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2} \cdot \left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]$$

und der Inhalt der 8 aus je zwei dreiseitigen Pyramiden zusammengesetzten Körper, da deren Höhe zusammen $h_1 = \frac{a\sqrt{3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}$ ist,

$$\frac{8\,G_1 h_1}{8} = \frac{2\left[\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2+\left(1-\frac{1}{m}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right]}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\,a^3$$

$$= \frac{4\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}+1-\frac{1}{nm}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}\,a^3.$$

Der Inhalt der Dyakisdodekaeder $\frac{mOn}{2}$ ist also:

$$J = \frac{4\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)a^3}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2} + \frac{4\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}+1-\frac{1}{nm}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)a^3}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$$

$$= \frac{4\left[\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}+1-\frac{1}{mn}-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\right]a^3}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$$

$$= \frac{4\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)a^3}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)},\ \text{bei}\ \frac{3O\frac{3}{2}}{2} = \frac{18}{7}a^3,\ \text{bei}\ \frac{4O2}{2} = \frac{160}{49}a^3.$$

Der Inhalt der Pentagondodekaeder $\frac{\infty On}{2}$ ist auszudrücken durch die Formel:

$$J = \frac{4\left(2-\frac{1}{n}\right)a^3}{1+\frac{1}{n}},\ \text{bei}\ \frac{\infty O2}{2} = 4\,a^3.$$

Aus der obigen allgemeinen Formel ergiebt sich, dass man den Inhalt der pentagonal-hemiedrischen Formen findet, wenn man den Inhalt des umschriebenen Würfels mit dem Produkt aus einer Koordinate der trigonalen Ecke und der halben Summe der Koordinaten der pentagonalen Ecke multipliziert.

§ 140. Die Inhalte der tetraedrisch-hemiedrischen Körper. Bei den tetraedrisch-hemiedrischen Formen treten in vier Oktanten an die Stelle der trigonalen Ecken tetraedrische. Die Pyramiden, welche durch die Symmetrieebenen erhalten werden, haben in diesen Oktanten die grössere Höhe $\frac{a}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}$. Demnach ist der Inhalt der Hexakistetraeder:

$$J = \frac{4a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} + \frac{4a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}$$

$$= \frac{4\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}+1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}$$

$$= \frac{8a^3}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}$$

für $\frac{3O\frac{3}{2}}{2} = 3a^3$, für $\frac{4O2}{2} = \frac{128}{35}a^3$.

Der Inhalt der Trigondodekaeder $\frac{mOm}{2}$ ist $= \frac{8a^3}{\left(1+\frac{2}{m}\right)}$, für $\frac{2O2}{2} = 4a^3$, für $\frac{3O3}{2} = \frac{24}{5}a^3$.

Der Inhalt der Deltoiddodekaeder mO ist $= \frac{8a^3}{4-\frac{1}{m^2}}$, für $\frac{\frac{3}{2}O}{2} = \frac{9}{4}a^3$, für $\frac{2O}{2} = \frac{32}{15}a^3$.

Das Tetraeder hat den Inhalt $\frac{8}{3}a^3$.

Da sich die Inhalte der Körper verhalten wie die Cuben der Kanten und die Kante des Tetraeders $a_1 = 2a\sqrt{2}$ ist, so findet man den Inhalt des Tetraeders, wenn man für $a = \frac{a_1}{2\sqrt{2}}$ und $a^3 = \frac{a^3_1}{16\sqrt{2}}$ setzt $J_1 = \frac{1}{12}\cdot\sqrt{2}\,.\,a^3_1$.

Nach der allgemeinen Formel findet man den Inhalt jeder tetraedrisch-hemiedrischen Form, wenn man den Inhalt des umschriebenen Würfels mit dem Produkt einer Koordinate der trigonalen Ecke und einer Koordinate der tetraedrischen Ecke multipliziert.

§ 141. **Der Inhalt eines Plagieders.** Bei der plagiedrischen Hemiedrie entsteht dadurch, dass die Hälfte der Flächen wächst, die andere verschwindet, über jeder verschwindenden Fläche eine neue Ecke, die Spitze einer dreiseitigen Pyramide über einer Fläche des Achtundvierzigflächners. Bei $\frac{3O\frac{3}{2}}{2}$ (Fig. 70) hat diese Ecke die Koordinaten $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{9}{20}$, $z = \frac{3}{20}$; die durch diesen Punkt gelegte Fläche, parallel zu $A_1 B_n C_m$, hat die Centraldistanz $d = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \frac{\frac{3}{4}}{1} + \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{2}} + \frac{\frac{3}{20}}{3} = \frac{11}{10}$ (§ 112). Die Höhe der kleinen Pyramide ist also $\frac{1}{10}\varrho$.

Da der Inhalt des ganzen Achtundvierzigflächners $3O\frac{3}{2}$ gleich $\frac{12}{5}a^3$, derjenige der kleinen Pyramiden, in die derselbe durch die

Symmetrieebenen zerlegt wird, also $= \frac{1}{20} a^3$, so ist der Inhalt der Pyramiden von gleicher Grundfläche, aber einer Höhe, welche nur $\frac{1}{10}$ der Höhe der anderen Pyramiden beträgt, gleich $\frac{1}{200} a^3$. Da es 24 solcher Pyramiden giebt, so beträgt die Vergrösserung des Volumens $\frac{24}{200} a^3 = \frac{3}{25} a^3$ und ist also der Inhalt des Plagieders

$$r \frac{3 O \frac{3}{2}}{2} \text{ oder } l \frac{3 O \frac{3}{2}}{2} = \frac{12}{5} a^3 + \frac{3}{25} a^3 = \frac{63}{25} a^3.$$

Die Vergrösserung des Volumens beträgt, wenn man die Werte m und n statt der speziellen Werte 3 und $\frac{3}{2}$ in die Rechnung einstellt,

$$\frac{\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{1}{mn}\right)-\frac{1}{m}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)} \cdot \frac{8a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)},$$

woraus man auch erkennen kann, dass, da dieser Ausdruck bei $m = n$, $n = 1$ und $m = \infty$ den Wert 0 hat, alle Formen mit Ausnahme der Achtundvierzigflächner $m O n$ bei der plagiedrischen Hemiedrie eine Veränderung nicht erfahren. Bei $m = n^2$, also z. B. bei $4 O 2$ vereinfacht sich der Ausdruck durch Wegfall des zweiten Gliedes im Nenner. Der Inhalt der Plagieder $r \frac{4 O 2}{2}$ oder $l \frac{4 O 2}{2}$ ist darnach $= \frac{64}{21} a^3 + \frac{1}{21} \cdot \frac{64}{21} a^3 = \frac{1408}{441} a^3$.

§ 142. **Die Oberfläche der regulären Formen.** Der Abstand der Flächen einer regulären Form $m O n$ lässt sich aus der allgemeinen Formel (vergl. § 115) ableiten.

$\varrho = \frac{a}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}}$ wird für eine Fläche $A_1 B_n C_m$ von $m O n$, bei der $a = 1$, $b = n$, $c = m$ zu setzen ist, sich in folgende Formel verwandeln: $\varrho = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}$.

Da der Inhalt der 48 dreiseitigen Pyramiden, in welche der Achtundvierzigflächner $m O n$ durch die Symmetrieebenen zerlegt wird, $J = \frac{8a^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$ ist, so ist der Inhalt der einzelnen Pyramide $i = \frac{a^3}{6\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$. Dieser Inhalt lässt sich auch aus dem Dreieck ART (ein Stück von $A_1 B_n C_m$) und der zugehörigen Höhe

ϱ ausdrücken: $i = \frac{ART.\varrho}{3}$, daher ist das Dreieck $ART = \frac{3i}{\varrho}$
$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} a^2$ und die Oberfläche des Achtundvierzigflächners $O = \frac{3J}{\varrho}$ oder $O = \frac{24\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} a^2$
bei $3O\frac{3}{2} = \frac{12a^2}{5}\sqrt{14}$, bei $4O2 = \frac{16a^2}{7}\sqrt{21}$.

Darnach ist die Oberfläche der Ikositetraeder:

$$mOm = \frac{24\sqrt{1+\frac{2}{m^2}}}{\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{2}{m}\right)} a^2,$$

bei $2O2 = 4a^2\sqrt{6}$, bei $3O3 = \frac{18a^2}{5}\sqrt{11}$.

Die Oberfläche der Triakisoktaeder mO ist

$$= \frac{24\sqrt{2+\frac{1}{m^2}}}{2\left(2+\frac{1}{m}\right)} a^2 = \frac{12\sqrt{2+\frac{1}{m^2}}}{2+\frac{1}{m}} a^2,$$

bei $\frac{3}{2}O = \frac{3a^2}{2}\sqrt{22}$, bei $2O = \frac{36}{5}a^2$.

Die Oberfläche der Pyramidenwürfel ∞On ist

$$= \frac{24\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} a^2, \text{ bei } \infty O2 = \frac{16a^2}{3}\sqrt{5}.$$

Die Oberfläche des Rhombendodekaeders ist

$$= \frac{24a^2\sqrt{2}}{2.2.1} = 6a^2\sqrt{2}.$$

Die Oberfläche des Oktaeders ist

$$= \frac{24a^2\sqrt{3}}{2.3} = 4a^2\sqrt{3}.$$

Die Oberfläche des Hexaeders ist

$$= 24a^2.$$

Nimmt man als Einheit die ganze Axenlänge $a_1 = 2a$, so findet man die Oberfläche des Hexaeders, indem man $a = \frac{a_1}{2}$, also $a^2 = \frac{a_1^2}{4}$ setzt, $O_1 = \frac{24a_1^2}{4} = 6a_1^2$ gleich der Summe der 6 Quadrate mit der Kantenlänge $= a_1$.

Die Oberfläche der Dyakisdodekaeder $\frac{m O n}{2}$ ist:

$$\frac{3J}{\varrho} \text{ (s. § 139)} = \frac{12\left(2-\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{\left(1-\frac{1}{mn}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} a^2,$$

bei $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2} = \frac{18 a^2}{7}\sqrt{14}$, bei $\frac{4 O 2}{2} = \frac{16 a^2}{7}\sqrt{21}$.

Die Oberfläche der Pentagondodekaeder ist:

$$\frac{12\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} a^2, \text{ bei } \frac{\infty O 2}{2} = 6 a^2\sqrt{5}.$$

Die Oberfläche der Hexakistetraeder $\frac{m O n}{2}$ ist:

$$\frac{24\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)} a^2,$$

bei $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2} = 3 a^2\sqrt{14}$, bei $\frac{4 O 2}{2} = \frac{96 a^2}{35}\sqrt{21}$.

Die Oberfläche der Trigondodekaeder ist:

$$\frac{24\sqrt{1+\frac{2}{m^2}}}{1+\frac{2}{m}} a^2,$$

was für $\frac{2 O 2}{2}$ $6 a^2\sqrt{6}$ und für $\frac{3 O 3}{2}$ $\frac{24 a^2}{5}\sqrt{11}$ gibt.

Die Oberfläche der Deltoiddodekaeder ist:

$$\frac{24\sqrt{2+\frac{1}{m^2}}}{4-\frac{1}{m^2}} a^2,$$

also bei $\frac{\frac{3}{2} O}{2}$ gleich $\frac{9 a^2}{4}\sqrt{22}$ und bei $\frac{2 O}{2}$ gleich $\frac{144}{17} a^2$.

Die Oberfläche des Tetraeders ist: $8 a^2\sqrt{3}$.

Die Oberfläche des Plagieders $r\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ oder $l\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ ist

$$\frac{63 a^2}{25}\sqrt{14} \text{ von } r \text{ oder } l\,\frac{4 O 2}{2} = \frac{352}{147} a^2\sqrt{21}.$$

§ 143. **Der Flächenwinkel zweier Ebenen.** Der Neigungswinkel (Flächenwinkel) zweier Ebenen ABC und $A_1 B_1 C_1$ ist der Supplementwinkel zu dem Winkel FOF_1, welchen die Normalen c und c_1 miteinander bilden. Die Koordinaten von F sind $x = \frac{\varrho^2}{a}$,

$y = \frac{\varrho^2}{b}$, $z = \frac{\varrho^2}{c}$, die von F_1 sind $x_1 = \frac{\varrho_1{}^2}{a_1}$, $y_1 = \frac{\varrho_1{}^2}{b_1}$, $z_1 = \frac{\varrho_1{}^2}{c_1}$. Verschiebt man die Fläche $A_1 B_1 C_1$ parallel, bis sie ebenfalls den Abstand ϱ bekommt, so ändern sich die Koordinaten des Fusspunktes um den Faktor $\frac{\varrho}{\varrho_1}$ und sind also $\frac{\varrho \cdot \varrho_1}{a_1}$, $\frac{\varrho \cdot \varrho_1}{b_1}$, $\frac{\varrho \cdot \varrho_1}{c_1}$ die Koordinaten eines Punktes G, dessen Abstand $OG = OF = \varrho$ ist. Das Dreieck FGO ist gleichschenklig. Das Verhältnis der halben Grundlinie zum Schenkel $\frac{FG}{2\varrho}$ ist der Cosinus des halben Supplementwinkels w, also $\frac{FG}{2\varrho} = \cos\frac{w}{2}$. Die Entfernung FG ist (s. § 121)

$$= \sqrt{\left(\frac{\varrho^2}{a} - \frac{\varrho\varrho_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho^2}{b} - \frac{\varrho\varrho_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho^2}{c} - \frac{\varrho\varrho_1}{c_1}\right)^2}$$

$$= \varrho\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{b} - \frac{\varrho_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{c} - \frac{\varrho_1}{c_1}\right)^2},$$

also ist

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{b} - \frac{\varrho_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{c} - \frac{\varrho_1}{c_1}\right)^2}.$$

§ 144. Die Flächenwinkel der holoedrischen regulären Formen. Da bei allen einfachen Formen ϱ und ϱ_1 gleich sind, so gilt für diese die Formel:

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{\varrho}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right)^2}.$$

Welche Winkel bilden hiernach die Flächen des Hexakisoktaeders mOn? Für alle Flächen ist:

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}}, \text{ also } \cos\frac{w}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{c_1}\right)^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}}$$

Die beiden in der hexaedrischen Kante zusammenstossende Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_n B_1 C_m$ bilden einen Winkel, der sich hiernach aus folgender Formel berechnen lässt:

$$\cos\frac{w(h)}{2} = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}}{2\sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2}\sqrt{\frac{2}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2\left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}\right)}}.$$

Die in der **oktaedrischen** Kante zusammenstossenden Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ bilden einen Winkel, für welchen die Formel gilt:

$$\cos \frac{w(o)}{2} = \frac{\frac{2}{m}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}} = \frac{1}{m\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}.$$

Die in einer **dodekaedrischen** Kante zusammenstossenden Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_m C_n$ bilden einen Winkel, welchen man mit folgender Formel bestimmt:

$$\cos \frac{w(d)}{2} = \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)}}.$$

Beispiel: $3\,O\,\frac{3}{2}$.

$$\cos \frac{w(h)}{2} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\sqrt{2(1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9})}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \cos 79^\circ 6' 24'',$$

also ist der Winkel an der hexaedrischen Kante $= 158^\circ 12' 48''$.

$$\cos \frac{w(o)}{2} = \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \cos 74^\circ 30' 4'',$$

also ist der Winkel an der oktaedrischen Kante $= 149^\circ 0' 8''$.

$$\cos \frac{w(d)}{2} = \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}}{\sqrt{2(1+\frac{4}{9}+\frac{1}{9})}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \cos 79^\circ 6' 24''.$$

Der Winkel an den dodekaedrischen Kanten ist demnach bei $3\,O\,\frac{3}{2}$ ebenso gross, wie an den hexaedrischen Kanten $= 158^\circ 12' 48''$. Die Bedingung hierfür ist allgemein, wie aus den Formeln zu ersehen ist, $1-\frac{1}{n} = \frac{1}{n}-\frac{1}{m}$, also $n = \frac{2m}{m+1}$, was auch für $5\,O\,\frac{5}{3}$ passt.

§ 145. **Die Flächenwinkel der pentagonal-hemiedrischen Formen.** Bei den **Dyakisdodekaedern** $\frac{m\,O\,n}{2}$ stossen in einer längeren pentagonalen Kante die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_n C_{-m}$ zusammen, der Winkel ist also derselbe, wie an der oktaedrischen Kante von $m\,O\,n$. In einer kürzeren pentagonalen Kante stossen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_{-n} C_m$ zusammen, deren Winkel also durch folgende Formel zu bestimmen ist:

$$\cos \frac{w(kp)}{2} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}.$$

An einer mittleren pentagonalen Kante stossen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_m B_1 C_n$ zusammen, daher:

$$\cos \frac{w(mp)}{2} = \frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{m}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}.$$

Für die Pentagondodekaeder würden sich diese Formeln vereinfachen in:

$$\cos \frac{w(kp)}{2} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ und}$$

$$\cos \frac{w(mp)}{2} = \frac{\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{2(n^2+1)}}.$$

Beispiel: $\frac{\infty O 2}{2}$.

$$\cos \frac{w(kp)}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos 63^\circ 26' 7'',$$

also ist der Winkel $w(kp) = 126^\circ 52' 14''$;

$$\cos \frac{w(mp)}{2} = \sqrt{\frac{7}{10}} = \cos 56^\circ 47' 23'',$$

daher der Winkel an der mittleren pentagonalen Kante $w(mp) = 113^\circ 34' 46''$.

§ 146. **Die Flächenwinkel der tetraedrischen Formen.** Bei den Hexakistetraedern $\frac{mOn}{2}$ sind die Winkel an den dodekaedrischen und hexaedrischen (verlängerten) Kanten dieselben wie an der vollflächigen Form. In einer tetraedrischen Kante stossen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_{-m} C_{-n}$ zusammen, also ist der Winkel an derselben zu bestimmen aus:

$$\cos \frac{w(t)}{2} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)}}.$$

Bei $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ ist der Winkel an der tetraedrischen Kante hiernach, da $\cos \frac{w(t)}{2} = \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{14}} = \cos 55^\circ 27' 47''$ ist, gleich $110^\circ 55' 24''$.

Die Flächen des Tetraeders bilden einen Winkel von $70^\circ 31' 34''$, da $\cos \frac{wt}{2} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \cos 35^\circ 15' 47''$ ist.

§ 147. Die Flächenwinkel der Plagieder. An den Plagiedern sind dreierlei Winkel. An der Kante K_1 (Fig. 69) stossen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_1 B_m C_{-n}$ zusammen, daher ist:

$$\cos\frac{w(k_1)}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)^2+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)}}.$$

An der Kante K_2 stossen die Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_n B_1 C_{-m}$ zusammen, daher ist:

$$\cos\frac{w(k_2)}{2} = \frac{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{4}{m^2}}}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}} = \sqrt{\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{2}{m^2}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)}}.$$

An der Kante K_3 stossen dieselben Flächen $A_1 B_n C_m$ und $A_m B_1 C_n$ zusammen, wie bei dem Dyakisdodekaeder; der Winkel ist also derselbe $= w(mp)$.

§ 148. Die Kantenwinkel der holoedrischen regulären Formen. Da die Oberfläche eines Achtundvierzigflächners (§ 142) $= \frac{24\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} a^2$, so ist, wenn a als Masseinheit $= 1$ gesetzt wird, der Inhalt eines der Dreiecke

$$= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} = \frac{1}{2\varrho\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}.$$

Die kleinere Seite sei h, die mittlere o und die längere d, der Faktor $\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = r$ (Koordinate der rhombischen Ecke), der Faktor $\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = t$ (Koordinate der trigonalen Ecke), dann ist (s. § 121):

$$h = \sqrt{2(r-t)^2+t^2}$$
$$o = \sqrt{(1-r)^2+r^2}$$
$$d = \sqrt{(1-t)^2+2t^2}$$

der Inhalt des Dreiecks $J = \frac{rt}{2\varrho}$.

Das Produkt einer Seite eines Dreiecks mit der zugehörigen Höhe desselben ist gleich dem doppelten Inhalt. Die Höhe ist ein Produkt einer zweiten Seite und dem Sinus des zwischen den beiden

Seiten liegenden Winkels, also ist der doppelte Inhalt eines Dreiecks gleich dem Produkt zweier Seiten desselben mit dem Sinus des von den beiden Seiten eingeschlossenen Winkels, der Sinus des Winkels aber gleich dem doppelten Inhalt des Dreiecks, dividiert durch das Produkt der beiden den Winkel einschliessenden Seiten. Dividiert man den doppelten Inhalt des Dreiecks $= \frac{r \cdot t}{\varrho}$ durch das Produkt der drei Seiten $h \,.\, o \,.\, d$, so findet man den Sinus eines Winkels, indem man diesen Quotienten Q mit der gegenüberliegenden Seite multipliziert.

Der Quotient Q ist $\frac{r \,.\, t}{\varrho \,.\, h \,.\, o \,.\, d}$ und also

$$\sin H = Q \,.\, h, \ \sin O = Q \,.\, o, \ \sin D = Q \,.\, d.$$

Beispiel: $3\,O\frac{3}{2}$, $r = \frac{3}{5}$, $t = \frac{1}{2}$, $h = \frac{3}{10}\sqrt{3}$, $o = \frac{1}{5}\sqrt{13}$, $d = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\varrho = \frac{3}{14}\sqrt{14}$ und $Q = \frac{140}{9\sqrt{182}} = \frac{10}{117} \cdot \sqrt{182}$.

$$\sin H = Q \,.\, h = \frac{\sqrt{546}}{39} = \sin 36^{0}\,49',$$

$$\sin O = Q \,.\, o = \frac{2}{9}\sqrt{14} = \sin 56^{0}\,15',$$

$$\sin D = Q \,.\, d = \frac{5}{117}\sqrt{546} = \sin 86^{0}\,56'.$$

Bei $m O m$, $\infty O n$ und ∞O ist der Winkel an der oktaedrischen Ecke $= 2\,H$, bei $m O m$, $m O$ und ∞O der Winkel an der trigonalen Ecke $= 2\,O$.

§ 149. Die Kantenwinkel der pentagonalen Formen. Zieht man in einem der Trapezoide, von denen die Dyakisdodekaeder begrenzt sind, die Diagonale, welche die beiden pentagonalen Ecken P_1 und P_2 verbindet, so wird es in zwei Dreiecke zerlegt und zwar in das gleichschenklige Dreieck $P_1 P_2 T$ und das Dreieck $A P_1 P_2$, welches man als Grundfläche der im § 139 bei der Berechnung des Inhalts der Dyakisdodekaeder benutzten Pyramide $A P_1 P_2 O$ ansehen kann. Der Inhalt dieser Pyramide ist $\frac{A P_1 P_2 \,.\, \varrho}{3} = \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{6\left(1 - \frac{1}{m n}\right)^2}$, und daher $A P_1 P_2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2\,\varrho\left(1 - \frac{1}{m n}\right)^2}$.

Setzt man die kleinere pentagonale Kante $A P_2 = k$, die längere pentagonale Kante $A P_1 = l$, die mittlere pentagonale Kante $P_1 T$ und $P_2 T = s$, die Diagonale $P_1 P_2 = d_1$ und bezeichnet man die

grössere Koordinate der pentagonalen Ecken $\frac{1-\frac{1}{m}}{1-\frac{1}{mn}}$ mit p_1, die kleinere Koordinate dieser Ecken $\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{nm}}$ mit p_2, so ist der Quotient:

$$Q = \frac{2\,A\,P_1\,P_2}{k\,l\,d} = \frac{p_1\,p_2}{\varrho\,.\,k\,.\,l\,.\,d}$$

und

$$\sin A = Q\,.\,d_1$$
$$\sin K = Q\,.\,k$$
$$\sin L = Q\,.\,l.$$

Der Winkel $P_1 T P_2 = T$ wird aus dem gleichschenkligen Dreieck $P_1 P_2 T$ berechnet, und zwar ist:

$$\sin\frac{T}{2} = \frac{d_1}{2\,s}.$$

Der Winkel $A P_1 T = P_1$ ist $= K + 90^0 - \frac{T}{2}$, der Winkel $A P_2 T = P_2$ ist $L + 90^0 - \frac{T}{2}$.

Die Linien k, l, d_1 und s werden aus den Koordinaten der Ecken, welche sie verbinden, berechnet und zwar ist:

$$k = \sqrt{(1-p_1)^2 + p_2^2}$$
$$l = \sqrt{(1-p_2)^2 + p_1^2}$$
$$d_1 = \sqrt{(p_1-p_2)^2 + p_1^2 + p_2^2} = \sqrt{2\,(p_1^2 + p_2^2 - p_1 p_2)}$$
$$s = \sqrt{(p_1-t)^2 + (p_2-t)^2 + t^2}.$$

Beispiel: $\frac{3\,O\,\frac{3}{2}}{2}$. $p_1 = \frac{6}{7}$, $p_2 = \frac{3}{7}$, $t = \frac{1}{2}$, $\varrho = \frac{3}{14}\sqrt{14}$, $k = \frac{1}{7}\sqrt{10}$, $l = \frac{1}{7}\sqrt{52}$, $d_1 = \frac{3}{7}\sqrt{6}$, $s = \frac{5}{14}\sqrt{3}$, $Q = 7\sqrt{\frac{7}{390}}$.

$$\sin A = Q\,.\,d_1 = 3\sqrt{\frac{7}{65}} = \sin 79^0\,54',$$

$$\sin K = Q\,.\,k = \sqrt{\frac{7}{39}} = \sin 25^0\,4',$$

$$\sin L = Q\,.\,l = \sqrt{\frac{14}{15}} = \sin 75^0\,2',$$

$$\sin\frac{T}{2} = \frac{d}{2\,s} = \sqrt{\frac{18}{25}} = \sin 58^0\,3',\quad T = 116^0\,6',$$

$$P_1 = K + 90^0 - \frac{T}{2} = 57^0\,1',$$

$$P_2 = L + 90^0 - \frac{T}{2} = 106^0\,59',$$

$$A + P_1 + P_2 + T = 360^0.$$

§ 150. **Die Kantenwinkel der tetraedrischen Formen.** Aus der Oberfläche der Hexakistetraeder (§ 142) findet man den Inhalt eines der begrenzenden Dreiecke $= \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}}{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)}$ also $\triangle ATT_1 = \frac{t \cdot t_1}{\varrho}$, wobei t die Koordinate der trigonalen Ecke und t_1 die Koordinate der tetraedrischen Ecke ist. Die kürzere Kante ist die dodekaedrische der holoedrischen Form:

$$d = \sqrt{(1-t)^2 + t^2},$$

die verlängerte hexaedrische Kante:

$$h_1 = \sqrt{2\,(t_1-t)^2 + (t_1+t)^2},$$

die tetraedrische Kante:

$$e = \sqrt{(1-t_1)^2 + 2\,t_1^2}.$$

Der Quotient $Q = \frac{2\,A\,T\,T_1}{d\,e\,h_1} = \frac{2\,t\,t_1}{\varrho \cdot d \cdot e \cdot h_1}$.

Man findet also den der Seite h_1 gegenüberliegenden Winkel an der oktaedrischen Ecke aus der Formel:

$$\sin A = Q \cdot h_1,$$

den Winkel an der trigonalen Ecke aus:

$$\sin T = Q \cdot e,$$

und den Winkel an der tetraedrischen Ecke aus:

$$\sin T_1 = Q \cdot d.$$

Beispiel: $\frac{3\,O\,\frac{3}{2}}{2}$. $t = \frac{1}{2}$, $t_1 = \frac{3}{4}$, $\varrho = \frac{3}{14}\sqrt{14}$, $d = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $e = \frac{1}{4}\sqrt{19}$, $h_1 = \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $Q = \frac{8}{171}\sqrt{266}$.

$$\sin A = Q \cdot h_1 = \frac{2}{57}\sqrt{798} = 82^0\,23',$$

$$\sin T = Q \cdot e = \frac{2}{9}\sqrt{18} = 56^0\,15',$$

$$\sin T_1 = Q \cdot d = \frac{4}{171}\sqrt{798} = 41^0\,22',$$

$$A + T + T_1 = 180^0.$$

§ 151. **Die Kantenwinkel eines Plagieders.** Die Kantenwinkel aller Formen lassen sich aus den Kanten in allen Fällen auch mit Hilfe der einfachsten trigonometrischen Formeln berechnen. Als Beispiel kann die Berechnung der Winkel eines Fünfecks des Pla-

gieders $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ dienen. Die Kante $OP_1 = K_1$ [aus den Koordinaten der Ecke O (Fig. 182) = (1, 0, 0) und der Ecke $P_1 = (\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{3}{20})$ zu berechnen] ist $= \frac{1}{20}\sqrt{115}$, die Kante $P_2P_3 = K_2 = \frac{3}{10}\sqrt{3}$, die Kante $P_1T = K_3 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, die Diagonale $P_1P_2 = d_1 = \frac{3}{10}\sqrt{6}$ und die Diagonale $d_2 = P_1P_3 = \frac{3}{10}\sqrt{5}$. Durch die Diagonalen wird das Fünfeck in zwei gleichschenklige Dreiecke P_1P_3O und P_1P_2T und ein ungleichseitiges Dreieck $P_1P_2P_3$ zerlegt.

Aus Dreieck P_1P_3O findet man:

$$sin \frac{POP_3}{2} = \frac{d_2}{2k_1} = \frac{3}{\sqrt{23}} = sin\ 38^\circ 43',$$

also $\sphericalangle POP_3 = 77^\circ 26'$ und $\sphericalangle OP_1P_3 = \sphericalangle OP_3P_1 = 90^\circ - 38^\circ 43' = 51^\circ 17'$.

Aus Dreieck P_1P_2T findet man:

$$sin \frac{P_1TP_2}{2} = \frac{d_1}{2k_3} = \frac{3\sqrt{2}}{5} = sin\ 58^\circ 3',$$

also $\sphericalangle P_1TP_2 = 116^\circ 6'$ gleich T an $\frac{3 O \frac{3}{2}}{2}$ (§ 147), und $\sphericalangle P_1P_2T = \sphericalangle P_2P_1T = 90^\circ - 58^\circ 3' = 31^\circ 57'$.

In dem Dreieck $P_1P_2P_3$ lässt sich aus den drei Seiten d_1, d_2, k_2 ein Winkel mit Hilfe des Cosinussatzes berechnen, es ist darnach:

$$cos\ \delta_1\ (\delta_1 = \sphericalangle P_1P_3P_2) = \frac{d_2^2 + k_2^2 - d_1^2}{2d_2k_2} = \frac{1}{\sqrt{15}} = cos\ 75^\circ 2'.$$

Hieraus findet man unter Anwendung des Sinussatzes:

$$sin\ \delta_2\ (\delta_2 = \sphericalangle P_1P_2P_3) = \frac{sin\ \delta_1\ d_2}{d_1} = sin\ \delta_1 \,.\, \sqrt{\tfrac{5}{6}} = sin\ 61^\circ 53',$$

$$sin\ \gamma\ (\gamma = \sphericalangle P_2P_1P_3) = \frac{sin\ \delta_1\ k_2}{d_1} = \frac{sin\ \delta_1 \,.\, \sqrt{2}}{2} = sin\ 43^\circ 5'.$$

Der ganze Winkel $OP_1T = OP_1P_3 + \gamma + P_2P_1T = 126^\circ 19'$. Der Winkel OP_3P_2 ist gleich $OP_3P_1 + \delta_1 = 126^\circ 19'$, also ebenso gross wie OP_1T. Der Winkel P_3P_2T ist gleich $P_1P_2T + \delta_2 = 93^\circ 50'$. Die Summe der fünf Winkel muss $6R$ sein, was man zur Kontrolle der Rechnung benutzen kann.

§ 152. **Die Winkel an Kombinationskanten.** Der Winkel, welchen irgend zwei Flächen an Kombinationen bilden, lässt sich nach der im § 143 abgeleiteten allgemeinen Formel bestimmen:

$$cos \frac{w}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{b} - \frac{\varrho_1}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{\varrho}{c} - \frac{\varrho_1}{c_1}\right)^2}.$$

Beispiel: Es soll der Winkel an der Kombinationskante einer Pentagondodekaederfläche und einer Oktaederfläche bestimmt werden (Fig. 110). Die zwei Flächen seien $A_1 B_n C_\infty$ und $A_1 B_1 C_1$, dann ist $a = 1$, $b = n$, $c = \infty$, $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = 1$,

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}},\ \varrho_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n_1^2}+\frac{1}{m_1^2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Daher wird:

$$\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{n+1}{\sqrt{3(n^2+1)}}\right)},\ \text{also z. B. bei } \frac{\infty O 2}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{\sqrt{15}}\right)} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{15}}{10}} = \cos 70^\circ 23',$$

daher $w = 140^\circ 46'$.

§ 153. **Die regulären Polyeder als Krystallformen.** Reguläre Polyeder sind solche, deren Kanten und Winkel, und zwar Flächenwinkel (unter einander) und Kantenwinkel gleich sind. Von den fünf möglichen regulären Polyedern sind Oktaeder, Hexaeder und Tetraeder mit den so genannten Krystallformen O, $\infty O \infty$ und $\frac{O}{2}$ übereinstimmend. Das von regulären Fünfecken begrenzte Dodekaeder kann man als Pentagondodekaeder $\frac{\infty O n}{2}$ auffassen, wobei n so gross ist, dass die Kanten gleich gross werden, also die doppelte kürzere pentagonale Kante gleich der mittleren pentagonalen Kante, oder:

$$\frac{2(n-1)}{n} = \sqrt{\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(1-\frac{n}{n+1}\right)^2+\left(\frac{n}{n+1}\right)^2},$$

$$\frac{2(n-1)}{n} = \frac{\sqrt{n^4+n^2+1}}{n(n+1)},\ \text{daher } n^4+n^2+1 = 4(n^2-1)^2,$$

$$\text{oder } n^4+n^2+1 = 4n^4-8n^2+4, \text{ daher:}$$

$$3n^4-9n^2+3 = 0 \quad \text{oder} \quad n^4-3n^2+1 = 0.$$

Zerlegt man diesen Ausdruck in Faktoren, so erhält man:

$$(n^2-1)^2-n^2 = (n^2+n-1)(n^2-n-1) = 0$$

und daraus die beiden Gleichungen:

$$n^2+n-1 = 0 \quad \text{und} \quad n^2-n-1 = 0,$$

welche beide denselben Wert $n = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ geben. Da $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ als negative Grösse nicht in Betracht kommt, so ist $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der Wert, bei welchem das Pentagondodekaeder ein reguläres Polyeder wird. Da dieser Wert irrational ist, so ist das reguläre Polyeder als Krystallform unmöglich. Ist $n > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, so sind vier Seiten des Fünfecks kleiner als die fünfte; ist $n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, so ist die letztere Seite kleiner.

Der Wert $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird auch gefunden, wenn man die im § 145 abgeleiteten Werte für die Flächenwinkel:

$$\cos\frac{w(kp)}{2} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ und } \cos\frac{w(mp)}{2} = \sqrt{\frac{n^2+n+1}{2(n^2+1)}}$$

gleich setzt, dann ist:

$$n^2 + n + 1 = 2$$

und also ebenfalls $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Setzt man diesen Wert für n in die Formel $\cos\frac{w}{2} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ ein, so erhält man $\cos\frac{w}{2} = \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \cos 58^0\, 17'$.

Der Flächenwinkel des regulären Dodekaeders ist also:

$$w = 116^0\, 34'.$$

Der Inhalt des Dodekaeders ist nach der Formel (§ 139) $J = \frac{4\left(2-\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}} a^3$ zu berechnen. Darnach ist für $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$J = \left(6\sqrt{5} - 10\right) a^3.$$

Der Radius der eingeschriebenen Kugel:

$$\varrho = \frac{a}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{a}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}.$$

Der Radius der umschriebenen Kugel R ist gleich der trigonalen Axe

$$= \frac{a\sqrt{3}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{2a\sqrt{3}}{1+\sqrt{5}} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right).$$

Die Oberfläche $O = \frac{3J}{\varrho}$ ist $= \frac{3(6\sqrt{5}-10)}{\frac{1}{10}\sqrt{50+10\sqrt{5}}} a^2$ oder vereinfacht

$$O = 6a^2\sqrt{250 - 110\sqrt{5}}.$$

Das **Ikosaeder** würde als Krystallform eine Kombination eines Pentagondodekaeders $\frac{\infty O n}{2}$ mit dem Oktaeder O sein, ein Mittelkrystall ähnlich dem in Fig. 112 abgebildeten, aber mit 20 gleichseitigen Dreiecken. Die gleichschenkligen Dreiecke an dieser Kombination verwandeln sich in gleichseitige, wenn die Kombinationskante, welche zwei pentagonale Ecken $\left(1,\ 0,\ \frac{n-1}{n}\right)$ und $\left(\frac{n-1}{n},\ 1,\ 0\right)$ verbindet, gleich der Kante des Pentagondodekaeders wird, also:

$$a\sqrt{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2+1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{2(n-1)}{n}\cdot a,$$

oder auch wenn die Flächenwinkel gleich werden, also:

$$cos\,\frac{w\,(kp)}{2} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \text{ (s. § 143)}$$

$$\text{und } cos\,\frac{w}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n+1}{\sqrt{3\,(n^2+1)}}\right)} \text{ (s. § 150),}$$

$$\text{mithin bei } \frac{1}{n^2+1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{n+1}{\sqrt{3\,(n^2+1)}}\right).$$

Beide Gleichungen führen entsprechend vereinfacht zur Gleichung:

$$n^2 - 3n + 1 = 0,$$

wonach $n = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ist, da $n_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, weil kleiner als 1, nicht in Betracht kommt. Da der Wert für n irrational ist, so ist auch das **Ikosaeder als Krystallform unmöglich.**

Die Oktaederflächen haben die Centraldistanz:

$$1+\frac{n-1}{n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Das **Ikosaeder** ist also die Kombination:

$$\frac{\infty O\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{2}\,(1)\,.\,O\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Daraus lassen sich alle übrigen Werte bestimmen:

ϱ (der Radius der eingeschriebenen Kugel) ist gleich der trigonalen Axe von O in der Centraldistanz $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also:

$$\varrho = \frac{1+\sqrt{5}}{6}\,a\sqrt{3} = \frac{a}{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{15}\right).$$

R (der Radius der umgeschriebenen Kugel) ist der Abstand der pentagonalen Ecke vom Mittelpunkt und als Hypotenuse eines Dreiecks, dessen eine Kathede $1\,a$ und dessen andere Kathede =

$$\frac{n-1}{n}\, a \text{ ist gleich } a\sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Die Kante a_1 ist gleich $\frac{2(n-1)}{n}\, a = (\sqrt{5}-1)\, a$.

Der Inhalt einer Fläche $\frac{a_1{}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3}-\sqrt{15})$, die ganze Oberfläche ist also:

$$O = 10\, a^2\, (3\sqrt{3}-\sqrt{15}).$$

und der Inhalt des Ikosaeders:

$$J = \frac{O\cdot\varrho}{3} = \frac{10}{18}a^3.(3\sqrt{3}-\sqrt{15})(\sqrt{3}+\sqrt{15}) = \frac{10\, a^3}{3}(\sqrt{5}-1).$$

Der Flächenwinkel des Ikosaeders findet man aus der Formel:

$$\cos\frac{w\,(kp)}{2} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \cos 69^0\, 6',$$

$$\text{daher } \cos w = 138^0\, 12'.$$

Da es in der Stereometrie üblich ist, die Inhalte, Oberflächen und die Radien der ein- und umgeschriebenen Kugeln aus den Kanten zu berechnen, so sind die obigen Formeln entsprechend umzuformen, indem man die Kanten a_1 aus der Halbaxe a berechnet.

Bei dem Tetraeder ist $a_1 = 2\, a\sqrt{2}$, also:

$$a = \frac{a_1}{2\sqrt{2}} = \frac{a_1\sqrt{2}}{4},\ a^2 = \frac{a_1{}^2}{8},\ a^3 = \frac{a_1{}^3\sqrt{2}}{32},$$

daher:

$$\text{Vol.} = \frac{8}{3}a^3 = \frac{1}{12}a_1{}^3\sqrt{2},$$

$$\text{Oberfl.} = 8\, a^2\sqrt{3} = a_1{}^2\sqrt{3},$$

$$\varrho = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a_1}{12}\sqrt{6}.$$

$$R = (\text{trigonale Axe des Würfels})\ a\sqrt{3} = \frac{a_1}{4}\sqrt{6}.$$

Bei dem Oktaeder ist $a_1 = a\sqrt{2}$, also:

$$a = \frac{1}{2}a_1\sqrt{2},\ a^2 = \frac{1}{2}a_1{}^2,\ a^3 = \frac{1}{4}a_1{}^3\sqrt{2},$$

$$\text{Vol.} = \frac{4}{3}a^3 = \frac{1}{3}a_1{}^3\sqrt{2},$$

$$\text{Oberfl.} = 4\, a^2\sqrt{3} = 2\, a_1{}^2\sqrt{3},$$

$$\varrho = \frac{1}{3}a\sqrt{3} = \frac{1}{6}a_1\sqrt{6},$$

$$R = a = \frac{1}{2}a_1\sqrt{2}.$$

Bei dem Ikosaeder ist $a_1 = a(\sqrt{5} - 1)$, also:

$$a = \frac{a_1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{4} a_1 (\sqrt{5} + 1),\ a^2 = \frac{1}{8} a_1^2 (3 + \sqrt{5}),$$

$$a^3 = \frac{1}{8} a_1^3 (2 + \sqrt{5}).$$

$$\text{Vol.} = 2 a^3 (3\sqrt{5} - 5) = \frac{5}{12} a_1^3 (3 + \sqrt{5}),$$

$$\text{Oberfl.} = 10 a^2 (3\sqrt{3} - \sqrt{15}) = 5 a_1 \sqrt{3},$$

$$\varrho = \frac{1}{6} a (\sqrt{3} + \sqrt{15}) = \frac{1}{12} a_1 (3 + \sqrt{5}) \sqrt{3},$$

$$R = \frac{1}{2} a \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4} a_1 \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Bei dem Hexaeder ist $a_1 = 2a$, also:

$$a = \frac{a_1}{2},\ a^2 = \frac{a_1^2}{4},\ a^3 = \frac{a_1^3}{8},$$

$$\text{Vol.} = 8 a^3 = a_1^3,$$

$$\text{Oberfl.} = 24 a^2 = 6 a_1^2,$$

$$\varrho = a = \frac{1}{2} a_1,$$

$$R = a\sqrt{3} = \frac{1}{2} a_1 \sqrt{3}.$$

Bei dem Dodekaeder ist $a_1 = a(3 - \sqrt{5})$, also:

$$a = \frac{a_1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{1}{4} a_1 (3 + \sqrt{5}),\ a^2 = \frac{1}{8} a_1^2 (7 + 3\sqrt{5}),$$

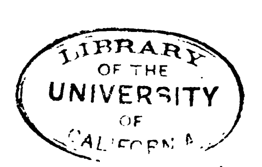
$$a^3 = \frac{1}{8} a_1^3 (9 + 4\sqrt{5}),$$

$$\text{Vol.} = 2 a^3 (3\sqrt{5} - 5) = \frac{1}{4} a_1^3 (15 + 7\sqrt{5}),$$

$$\text{Oberfl.} = 6 a^2 \sqrt{250 - 110\sqrt{5}} = 3 a_1^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}},$$

$$\varrho = \frac{1}{10} a \sqrt{50 + 10\sqrt{5}} = \frac{1}{20} a_1 \sqrt{250 + 110\sqrt{5}},$$

$$R = \frac{1}{2} a (\sqrt{15} - \sqrt{3}) = \frac{1}{4} a_1 (\sqrt{15} + \sqrt{3}).$$




Digitized by Google

